UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - CAMPUS JOINVILLE
CENTRO DE ENGENHARIA DA MOBILIDADE

Cálculo Diferencial e Integral II

Mariana de Oliveira Barra Costa

JANEIRO / 2015

SUMÁRIO

1. FÓRMULAS DE RECORRÊNCIA

As fórmulas de recorrência ou redução são obtidas através do método de integração por partes*. Logo, integrais do tipo $\int \cos^n x\, dx$ são facilmente resolvidas por meio de tais fórmulas (pela aplicação de tais fórmulas). A seguir, serão demonstradas algumas fórmulas de recorrência.

*Integração por partes: $\int u dv = uv - \int v du$

1.1. Fórmulas de recorrência: $\int \text{sen}^n x\, dx$ e $\int \cos^n x\, dx$

$\rightarrow \int \text{sen}^n x dx = \int \text{sen} x . \text{sen}^{n-1} x dx$

Usando a identidade trigonométrica: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Aplicando integração por partes:

$u = \text{sen}^{n-1} x$	$du = (n-1)\text{sen}^{n-2} x . \cos x dx$
$dv = \text{sen} x dx$	$v = -\cos x$

$\int \text{sen}^n x dx = -\cos x . \text{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x . \text{sen}^{n-2} x dx$

$\int \text{sen}^n x dx = -\cos x . \text{sen}^{n-1} x + (n-1)\int (1-\text{sen}^2 x) . \text{sen}^{n-2} x dx$

$\int \text{sen}^n x dx = -\cos x . \text{sen}^{n-1} x + (n-1)\int . \text{sen}^{n-2} x dx - (n-1)\int \text{sen}^n x dx$

$\int \text{sen}^n x dx + (n-1)\int \text{sen}^n x dx = -\cos x . \text{sen}^{n-1} x + (n-1)\int . \text{sen}^{n-2} x dx$

$$\int sen^n x dx = \frac{-cosx sen^{n-1} x}{n} + \frac{(n-1)}{n}\int sen^{n-2} x dx$$

$\rightarrow \int \cos^n x dx = \int \cos x . \cos^{n-1} x dx$

Para o cosseno é o mesmo procedimento:

$u = \cos^{n-1} x$	$du = -(n-1)\cos^{n-2} x . \text{sen} x dx$
$dv = \cos x dx$	$v = \text{sen} x$

1.2. Fórmulas de recorrência: $\int \sec^n x\, dx$ e $\int \text{cosec}^n x\, dx$

$\rightarrow \int \sec^n x dx = \int \sec^{n-2} x . \sec^2 x dx$

Usando a identidade trigonométrica: $\sec^2 x = tg^2 x + 1$

Aplicando integração por partes:

$u=sec^{n-2}x$ $du=(n-2)sec^{n-3}x.secx.tgxdx$

$dv=sec^{2}xdx$ $v=tgx$

$\int sec^{n}xdx=tgx.sec^{n-2}x-(n-2)\int sec^{n-2}x.(sec^{2}x-1)dx$

$\int sec^{n}xdx=tgx.sec^{n-2}x-(n-2)\int sec^{n}xdx+(n-2)\int sec^{n-2}xdx$

$\int sec^{n}xdx+(n-2)\int sec^{n}xdx=tgx.sec^{n-2}x+(n-2)\int sec^{n-2}xdx$

$$\int sec^{n}xdx=\frac{tgxsec^{n-2}x}{n-1}+\frac{(n-2)}{(n-1)}\int sec^{n-2}xdx$$

→ $\int cosec^{n}xdx=\int cosec^{n-2}x.cosec^{2}xdx$

Para a cossecante é o mesmo procedimento e usa-se a identidade trigonométrica $cosec^{2}x=cotg^{2}x+1$:

$u=cosec^{n-2}x$ $du=-(n-2)cos^{n-3}x.cosecx.cotgxdx$

$dv=cosec^{2}xdx$ $v=-cotgx$

1.3. Fórmulas de recorrência: ∫ $tg^{n}x$ dx e ∫ $cotg^{n}x$ dx

→ $\int tg^{n}xdx=\int tg^{n-2}x.tg^{2}xdx$

Usando a identidade trigonométrica: $sec^{2}x=tg^{2}x+1$

$\int(sec^{2}x-1).tg^{n-2}xdx=\int sec^{2}xtg^{n-2}xdx-\int tg^{n-2}xdx$

Aplicando integração por partes em $\int sec^{2}xtg^{n-2}xdx$:

$u=tg^{n-2}x$ $du=(n-2)tg^{n-3}x.sec^{2}xdx$

$dv=sec^{2}xdx$ $v=tgx$

$\int tg^{n}xdx=tg^{n-1}x-(n-2)\int tg^{n-2}x.sec^{2}xdx-\int tg^{n-2}xdx$

$\int tg^{n}xdx=tg^{n-1}x-(n-2)\int tg^{n-2}x.(tg^{2}x+1)dx-\int tg^{n-2}xdx$

$\int tg^{n}xdx=tg^{n-1}x-(n-2)\int tg^{n-2}xdx-\int tg^{n-2}xdx-(n-2)\int tg^{n}xdx$

$\int tg^{n}xdx-(n-2)\int tg^{n}xdx=tg^{n-1}x-(n-1)\int tg^{n-2}xdx$

$$\int tg^{n}xdx=\frac{tg^{n-1}x}{n-1}-\int tg^{n-2}xdx$$

→ $\int cotg^{n}xdx=\int cotg^{n-2}x.cotg^{2}xdx$

Para a cotangente é o mesmo procedimento e usa-se a identidade trigonométrica $cosec^{2}x=cotg^{2}x+1$:

$\int(\text{cosec}^2x-1).\text{cotg}^{n-2}xdx=\int\text{cosec}^2x\text{cotg}^{n-2}xdx - \int\text{cotg}^{n-2}xdx$

$u=\text{cotg}^{n-2}x$ $\quad\quad$ $du=-(n-2)\text{cotg}^{n-3}x.\text{cosec}^2xdx$

$dv=\text{cosec}^2xdx$ $\quad\quad$ $v=-\text{cotg}x$

2. SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA:

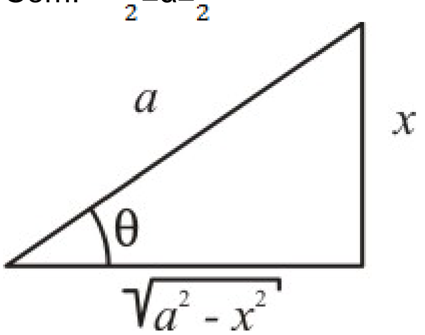
Quando a integral possui funções do tipo: $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ é possível resolvê-la fazendo uma substituição trigonométrica. A seguir, será explorado cada caso.

2.1. $\sqrt{a^2-x^2}$

a>0,
Fazendo a substituição: $x=a\text{sen}\alpha$, $dx=a\cos\alpha d\alpha$
Identidade trigonométrica utilizada: $\cos^2\alpha=1-\text{sen}^2\alpha$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2sen^2\alpha}=\sqrt{a^2(1-sen^2\alpha)}=a\sqrt{cos^2\alpha=acos\alpha}$$

Com: $-\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$

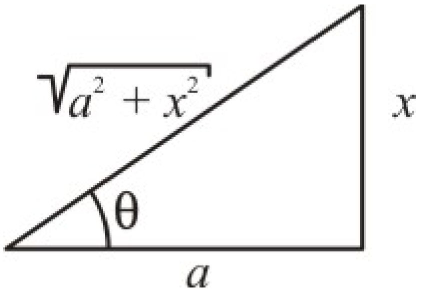


2.2. $\sqrt{x^2+a^2}$

a>0
Fazendo a substituição: $x=a\tan\alpha$, $dx=a\sec^2\alpha d\alpha$
Identidade trigonométrica utilizada: $\sec^2\alpha=tg^2\alpha+1$

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2tg^2\alpha}=\sqrt{a^2(1+tg^2\alpha)}=a\sqrt{sec^2\alpha}=asec\alpha$$

Com: $-\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$

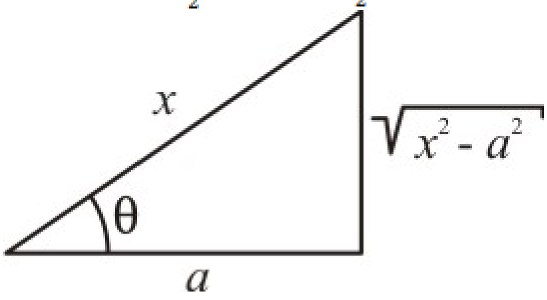


2.3. $\sqrt{x^2 - a^2}$

a>0, tgα≥0
Fazendo a substituição: x=asecα, dx=asecαtgαdα
Identidade trigonométrica utilizada: $\sec^2\alpha - 1 = tg^2\alpha$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 sec^2\alpha - a^2} = \sqrt{a^2(sec^2\alpha - 1)} = a\sqrt{tg^2\alpha} = atg\alpha$$

Com: $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$



2.4. Exempo:

Calculando a integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Fazendo as substituições:

$$a)\quad \mathrm{tg}(\theta) = \frac{x}{a} \quad \Longrightarrow \quad x = a\ \mathrm{tg}(\theta)$$

$$b)\quad dx = a\sec^2(\theta)\, d\theta$$

$$c)\quad \sqrt{a^2 + x^2} = a\sec(\theta)$$

Resolvendo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{a\sec^2(\theta)}{a\sec(\theta)}\, d\theta = \int \sec(\theta)\, d\theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(\sec(\theta) + \mathrm{tg}(\theta)) + C$$

Reescrevendo o resultado em termos da variável original x:

$\sec(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}$ e $\mathrm{tg}(\theta) = \frac{x}{a}$

Voltando para a integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(\sqrt{a^2 + x^2} + x\right) - \ln(a) + C$$

Resultado final:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(\sqrt{a^2 + x^2} + x\right) + C$$

3. FRAÇÕES PARCIAIS:

É uma técnica matemática muito utilizada na resolução de algumas integrais e em transformadas de Laplace.

3.1. Teorema 1

Teorema 1: Sejam α, β, m, n reais dados, com α ≠ β. Então, existem constantes A e B tais que:

a) $\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)}$

b) $\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}$

c) $\frac{P(x)}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}$

3.2. Exemplo:

Calculando a integral: $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx$

X^2-3x+2=(x-1).(x-2)

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1).(x-2)}$$

X+3=A(x-2)+B(x-1)

Fazendo: x=1, tem-se: A=-4
Fazendo x=2, tem-se: B=5

Logo,
$\frac{x+3}{x^2-3x+2} = \frac{-4}{(x-1)} + \frac{5}{(x-2)}$

Voltando para a integral:

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{-4}{(x-1)}\,dx + \int \frac{5}{(x-2)}\,dx = -4\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + k$$

3.3. Teorema 2

Teorema 2: sejam α, β, γ, m, n, reais dados com α≠β≠γ. Então existem constantes A, B, C tais que:

a) $\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}$

b) $\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}$

3.4. Exemplo:

$$\int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx$$

Como o grau do numerador é maior que o do denominador é necessário fazer uma divisão para extrair os inteiros. Logo, a integral fica:

$$\int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx = \int \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx + \int (x+1)\,dx$$

Resolvendo:

$$\int \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx$$

Reescrevendo a função:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x} = \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Fazendo x=0, x=-1 e x=2, tem-se A=$\frac{1}{2}$, B=0 e C=$\frac{21}{6}$

Substituindo na integral os valores de A, B e C e resolvendo, obtém-se o resultado:

$$\int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x}dx = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{21}{6}\ln|x-2| + k$$

3.5. Teorema 3 (denominador com fator irredutível do segundo grau):

Quando o denominador não possui raízes reais:

$$\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx$$

3.6. Exemplo:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx$$

Reescrevendo o denominador:

$$x^2+2x+2 = (x^2+2x+1)+1 = (x+1)^2+1$$

Assim:

$$\frac{2x+1}{x^2+2x+2} = \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}$$

$$\int \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}dx$$

Fazendo a substituição u=x+1 du=dx e resolvendo a integral, o resultado fica:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx = \ln(x^2+2x+2) - arctg(x+1) + k$$

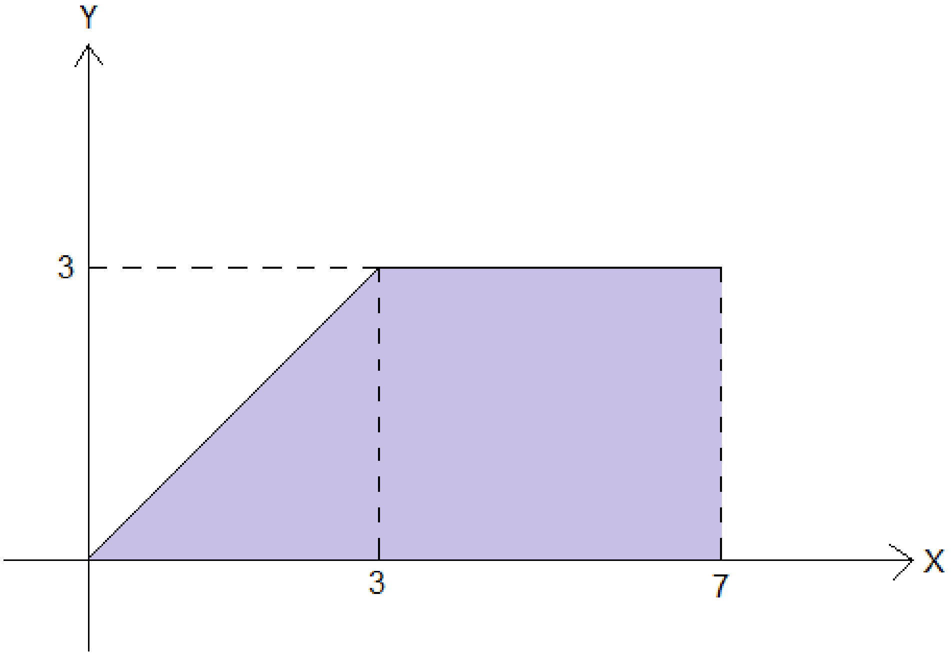
4. INTEGRAL IMPRÓPRIA:

A integral imprópria é o limite de uma integral definida quando o ponto final do intervalo ("a" ou "b", no caso acima) se aproxima de um número real especificado, de menos infinito ou de mais infinito. Em alguns casos, os dois lados do intervalo se aproximam de limites.

4.1. Integral de Funções Contínuas por Partes:

Uma função é contínua por partes num intervalo se for possível subdividir tal intervalo em um número finito de subintervalos, garantindo que a função seja contínua em cada intervalo aberto e que os limites laterais existam.

Exemplificando: $f(x)=\begin{cases} x, \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 3, \text{se } 3 \leq x \leq 7 \end{cases}$



Resolvendo a integral:

$$\int_0^7 f(x)dx = \int_0^3 x\,dx + \int_3^7 3dx$$

$$\int_0^7 f(x)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 + 3x\Big|_3^7$$

$$\int_0^7 f(x)dx = \frac{33}{2}$$

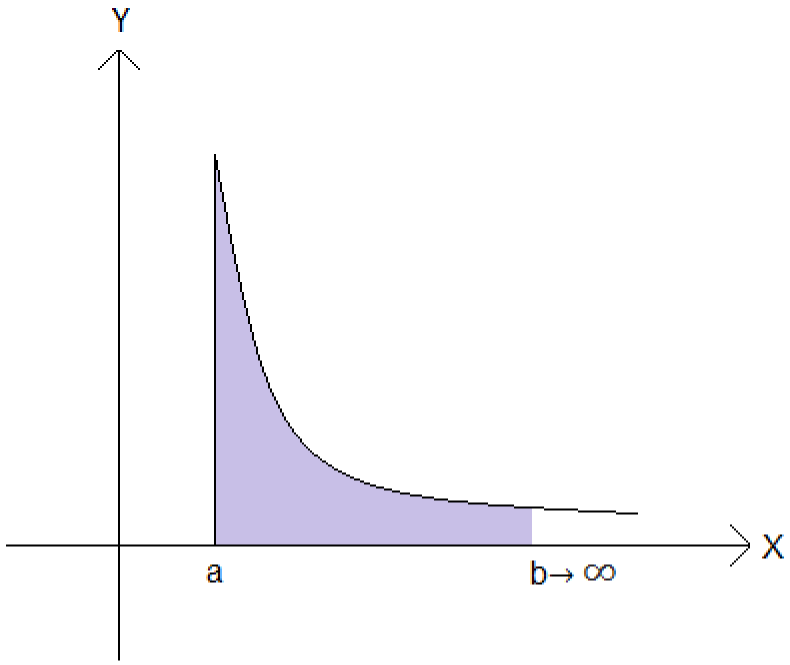
4.2. Integrais Impróprias com Limites de Integração Infinitos:

Neste tipo de integração imprópria considera-se a área de uma região que se prolonga infinitamente para direita ou para esquerda.

Estudando cada caso:

a) Se f(x) é contínua para todo x≥a, define-se:

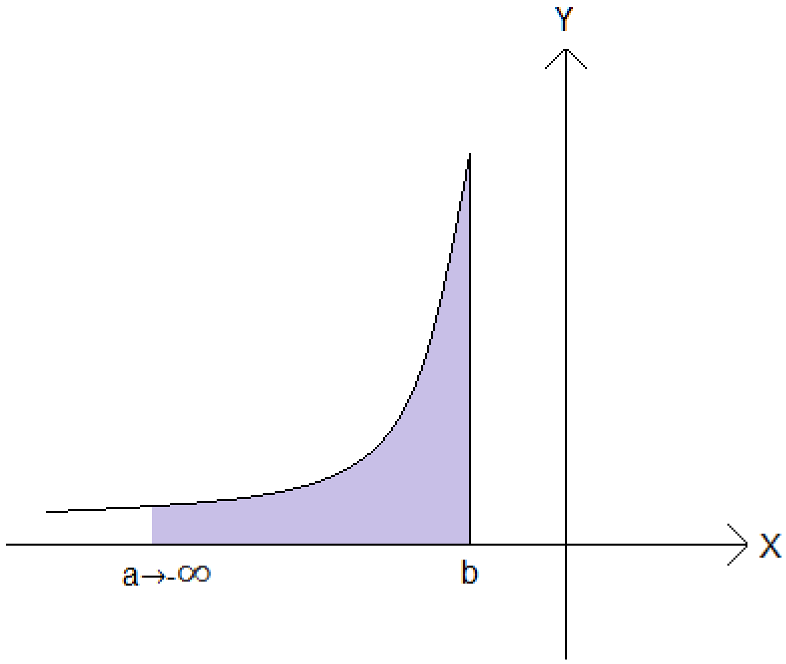
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$



Observação: Se o limite divergir ou for infinito, a integral imprópria diverge. Se o limite for finito, a integral converge.

b) Se f(x) é contínua para todo x≤b, define-se:

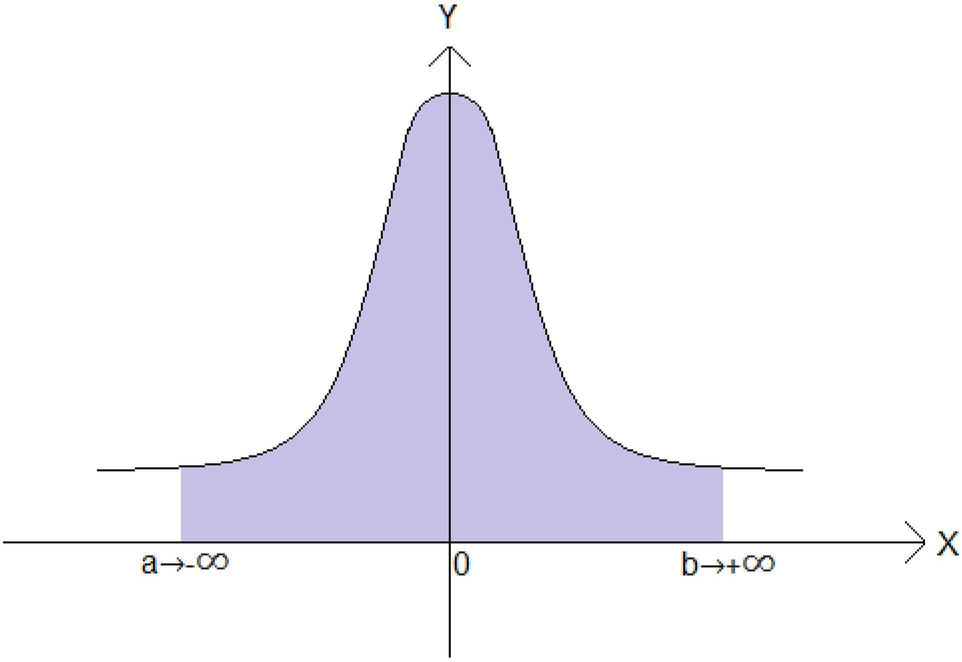
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$



Observação: Se o limite divergir ou for infinito, a integral imprópria diverge. Se o limite for finito, a integral converge.

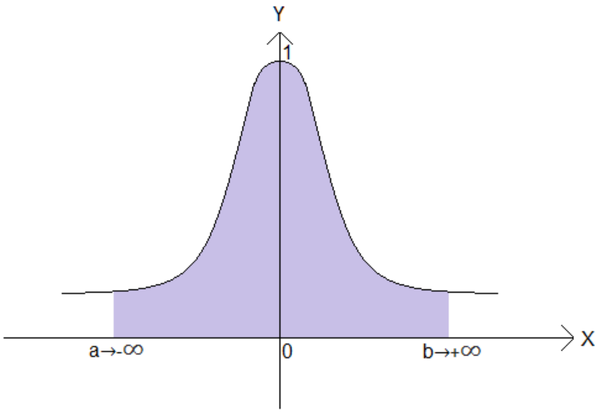
c) Se f(x) é continua para todo x, define-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx$$



Observação: Se um dos resultados da integral resultar em $+\infty$ ou $-\infty$ ou não existir, a integral imprópria é divergente. Se ambos os limites existirem e forem finitos, a integral será convergente.

Exemplo: Calcule a área da região limitada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ e o eixo dos x:



$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{1}{x^2+1}dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[arctgx\,|_a^0\right] + \lim_{b\to+\infty}\left[arctgx\,|_0^b\right] = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

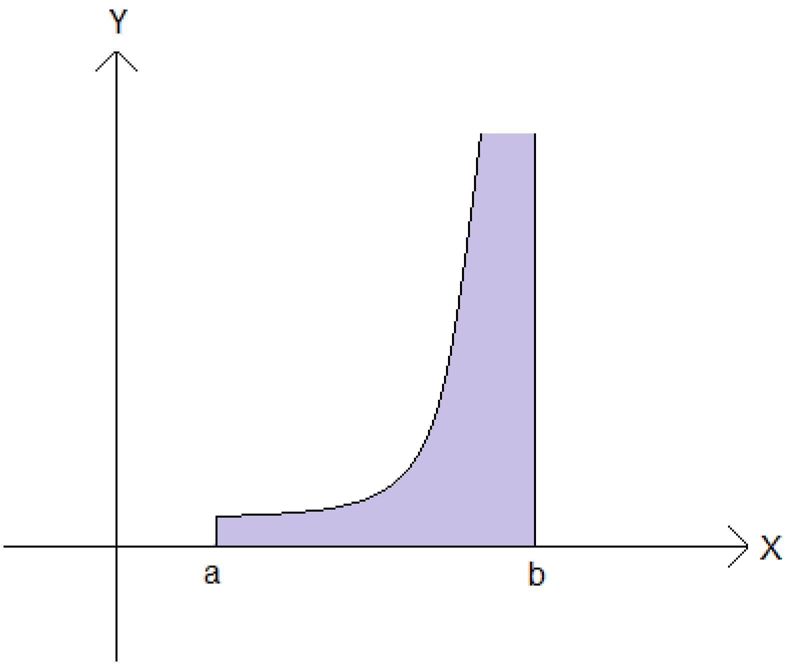
4.3. Integrais Impróprias com Integrandos Infinitos:

A integral imprópria com integrando ilimitado consiste numa aproximação para valores infinitos de uma região muito pequena.

Estudando cada caso:

a) Se f(x) é contínua em [a,b) e $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$ Define-se:

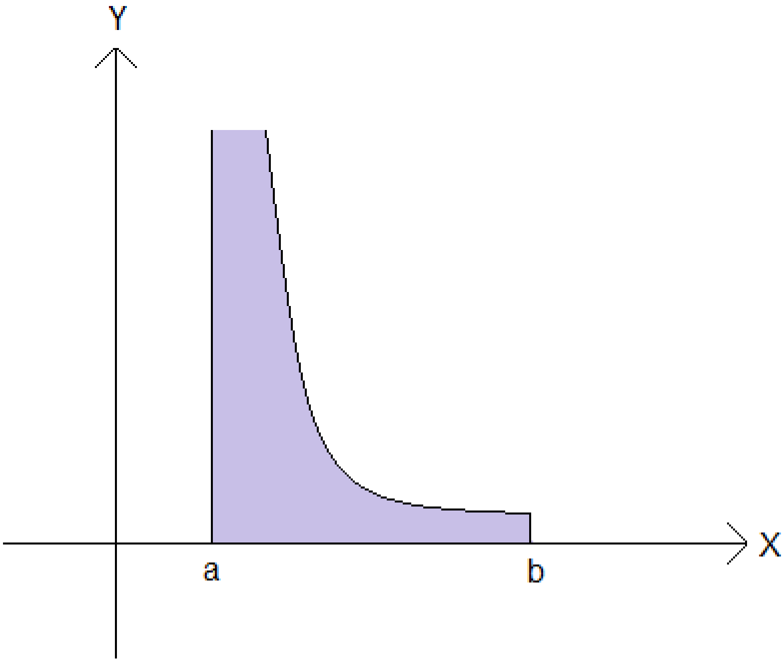
$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{s \to b^-} \int_a^s f(x)dx$$



Observação: Se o limite existir e for finito, a integral imprópria é convergente. Se o limite resultar em +∞ ou -∞ ou não existir, a integral imprópria é convergente.

b) Se f(x) é contínua em (a,b] e $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ define-se:

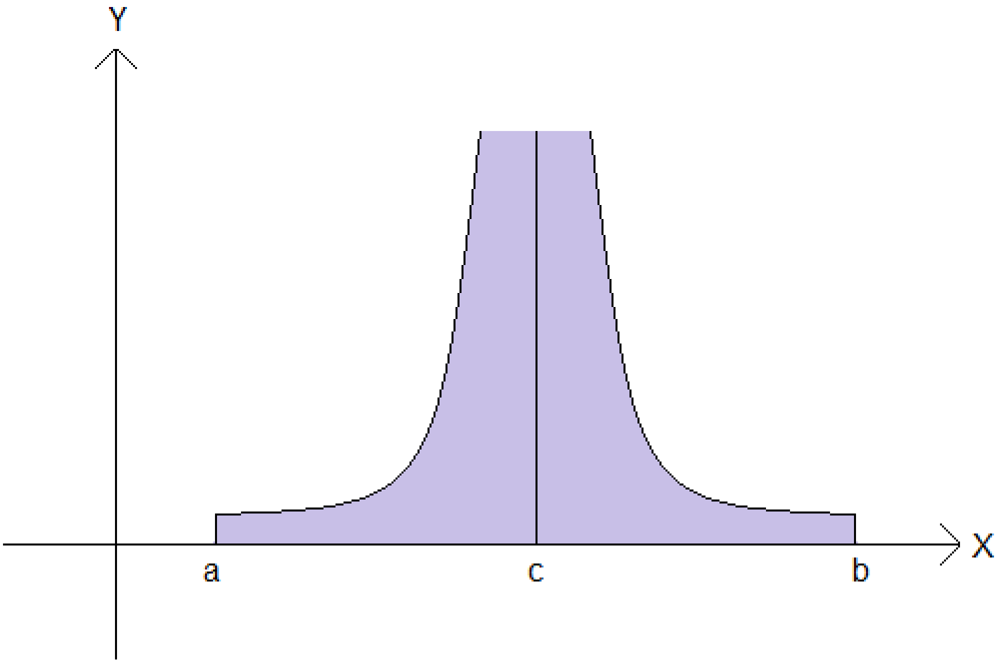
$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{s \to a^+} \int_r^b f(x)dx$$



Observação: Se o limite existir e for finito, a integral imprópria é convergente. Se o limite resultar em +∞ ou -∞ ou não existir, a integral imprópria é convergente.

c) Se f(x) é contínua para todo x em [a,b], exceto para x=c pertencente ao intervalo (a,b), define-se:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{s \to c^-} \int_a^s f(x)dx + \lim_{r \to c^+} \int_r^b f(x)dx$$



Observação: Se ambos os limites existirem e forem finitos, a integral imprópria será convergente. E, se pelo menos um dos limites não existir ou resultar em ±∞, a integral será divergente.

Exemplo: Determine se a integral imprópria diverge ou converge:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1-x}$$

$$I = \lim_{s \to 1^-} \int_0^s \frac{dx}{1-x} = \lim_{s \to 1^-} \left(-\ln(1-x)\Big|_0^s\right)$$

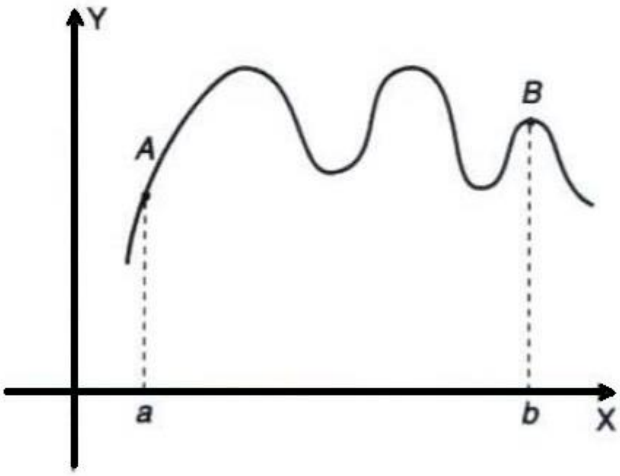
$$= \lim_{s \to 1^-} [-\ln(1-s) + ln 1] = +\infty$$

Logo, a integral imprópria é divergente.

5. APLICAÇÃO DA INTEGRAL DEFINIDA:

5.1. Comprimento de Arco:

O comprimento de arco pode ser um segmento de reta ou uma curva qualquer. Logo, procura-se encontrar um número que represente tal comprimento. Através do teorema do valor médio e da soma de Riemann é possível demonstrar a fórmula a seguir:



$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2 dx}$$

Exemplo: Calcular o comprimento de arco dado por $y=x^{3/2}-4$ de A(1,-3) até B(4,4).

Usando a fórmula:

$y'=3/2x^{1/2}$

$$s=\int_1^4 \sqrt{1+\left[\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right]^2}\,dx=\int_1^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x\,dx}=\frac{4}{9}\left(\frac{1+\frac{9x}{4}}{3/2}\right)^{3/2}\Big|_1^4$$

$s=\frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{8}{27}(\frac{13}{4})^{3/2}$ unidades de comprimento.

5.2. Comprimento de Arco de uma Curva Plana dada por suas Equações Paramétricas:

Fazendo uma mudança de variável na equação do comprimento de arco é possível chegar na fórmula:

$$s=\int_{t0}^{t1}\sqrt{x'(t)^2+y'(x)^2}\,dt$$

Exemplo: Encontre o comprimento do arco dado na forma paramétrica:

$$\begin{cases} x=-sen\,t \\ y=\cos t \end{cases},0\le t\le 2\pi$$

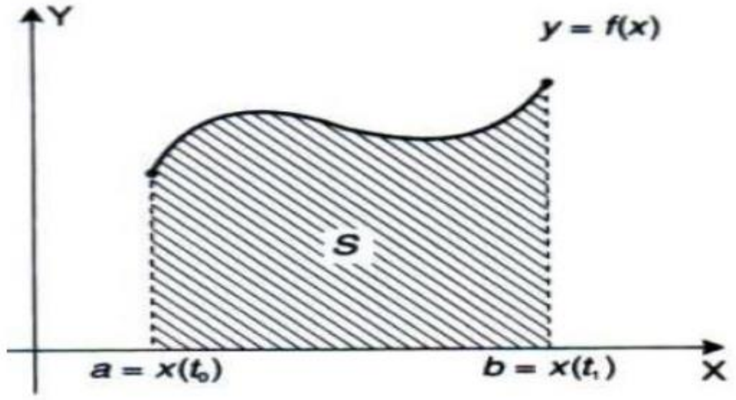
$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\cos t)^2+(-sen\ t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{1}dt=t\Big|_0^{2\pi}=2\pi\ u.c.$$

5.3. Área de uma Região Plana:

A área da região plana será delimitada por equações paramétricas. A seguir, estão as fórmulas para cada caso:

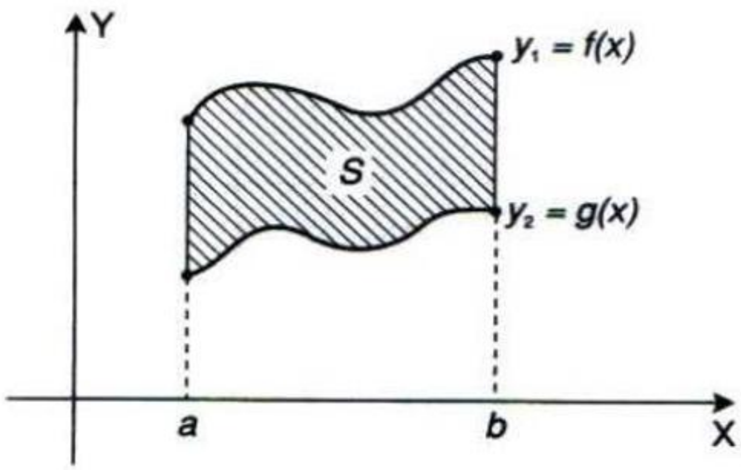
5.2.1 Área de uma Região Plana (Caso 1):

$$A=\int_{t0}^{t1}y(t)x'(t)dt$$



5.2.2 Área de uma Região Plana (Caso 2):

$$A = \int_{t0}^{t1} y1(t)x1'(t)dt - \int_{t2}^{t3} y2(t)x2'(t)dt$$

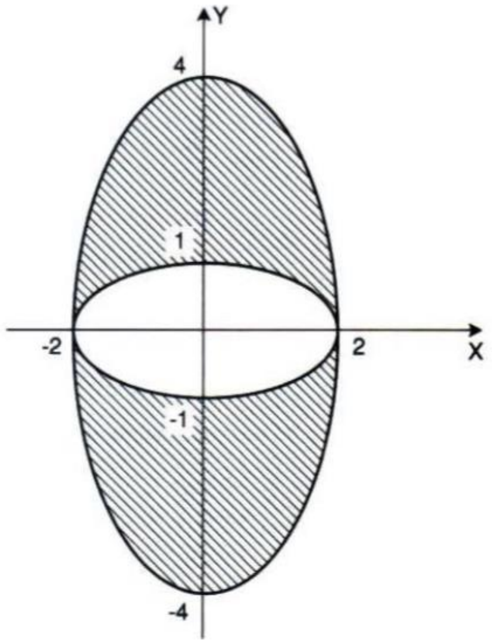


Para resolver esse tipo de problema é preciso determinar os limites de integração. Logo, para facilitar a visualização sempre é recomendável fazer o gráfico das funções.

Exemplo:

$$\begin{cases} x = 2cos\ t \\ y = 4\text{sent}\ t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2cos\ t \\ y = \text{sent}\ t \end{cases}$$

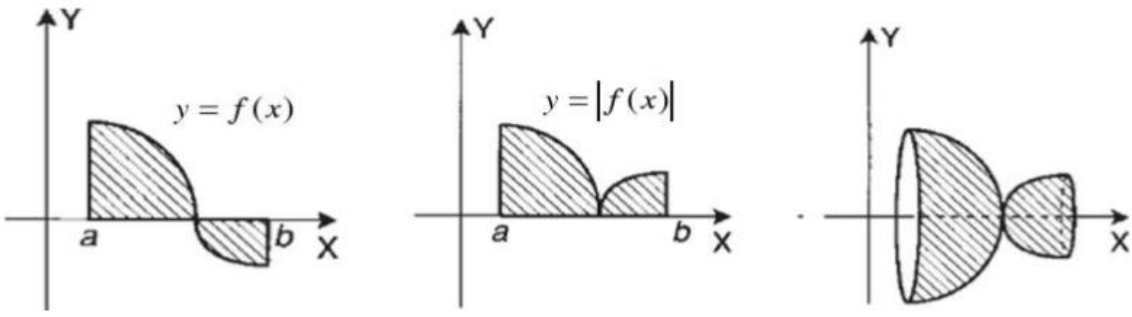


5.3 Volume de um Sólido de Revolução:

Quando se tem uma região plana e faz ela girar em torno de um reta ou plano, se obtém um sólido de revolução. A seguir será estudado cada caso:

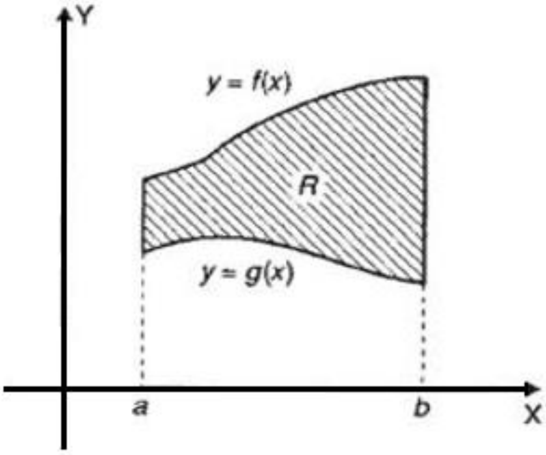
5.3.1 A Função f(x) é negativa em pontos de [a,b]:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



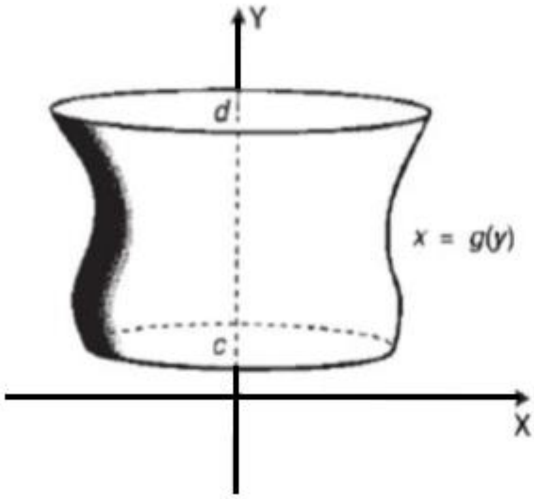
5.3.2 A Região R está entre os Gráficos de duas Funções f(x) e g(x) de a até b:

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$



5.3.3 A Região R gira em torno do Eixo dos y:

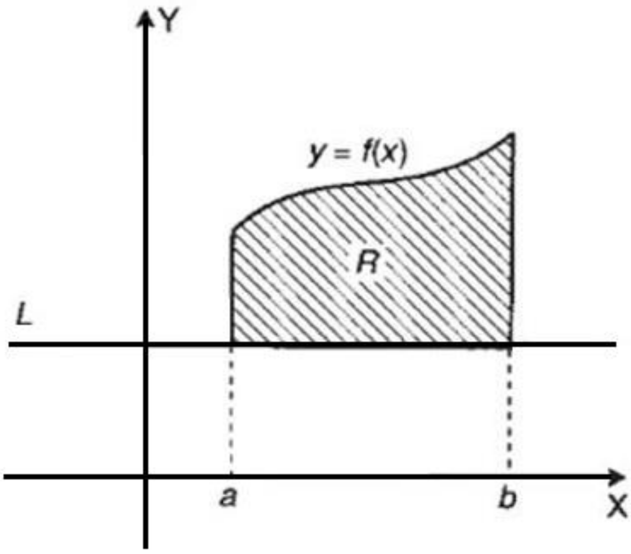
$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$



5.3.4 Rotação em torno de uma Reta Paralela a um dos Eixos Coordenados:

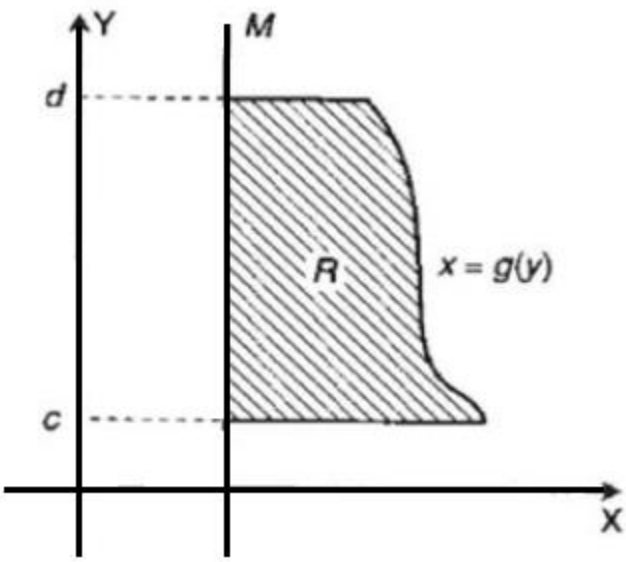
Se y=L

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - L]^2 dx$$



Se x=M

$$V = \pi \int_c^d [g(y) - M]^2 dy$$



Exemplo: A região R é definida pela curva $y=1/4x^2$, e o eixo dos x e as retas x=1 e y=4. A curva gira em torno do eixo x. Qual o volume do sólido de revolução?

Para resolver tal questão a fórmula utilizada será:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx = \frac{\pi}{16}.\frac{x^5}{5}\Big|_1^4 = \frac{\pi}{80}[4^5 - 1^5]$$
$$V = \frac{1023}{80}\pi\, u.v.$$

5.4 Área de Superfície de Revolução:

Utilizando o Teorema do Valor médio é possível demonstrar as duas fórmulas a seguir:
-Rotação do gráfico f em torno do eixo x:
$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$
-Rotação do gráfico g em torno do eixo y:
$$A = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}dy$$

Exemplo: Qual é a área de revolução obtida pela rotação em torno do eixo dos y, da curva dada por $x=y^3$, $0 \leq y \leq 1$.
Usando a equação:
$$A = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}dy$$

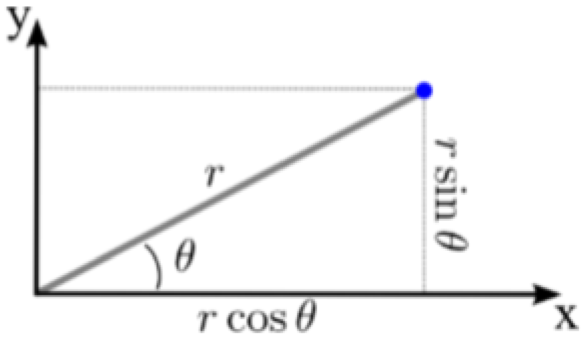
$$A = 2\pi \int_0^1 y^3\sqrt{1 + [3y^2]^2}dy$$
$$A = 2\pi \int_0^1 y^3\sqrt{1 + 9y^4}dy$$

Fazendo a mudança de variável: $u=1+9y^4$, $du=36y^3dy$ e resolvendo a integral indefinida:

$$I = \frac{1}{36}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{36}.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$A = \frac{2\pi}{54}(1 + 9y^4)^{3/2}\Big|_0^1$$
$$A = \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)u.a.$$

6. COORDENADAS POLARES:

É um sistema de coordenadas bidimensional, no qual cada ponto de um plano é determinado pela sua distância em relação a um ponto fixo e do ângulo em relação a uma direção fixa.



Correspondência entre o sistema de coordenadas cartesiana e o sistema de coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \end{cases}$$

Relação inversa:

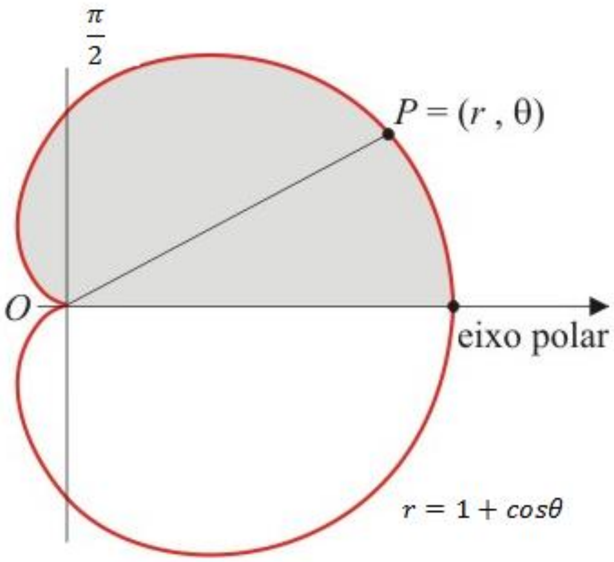
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

6.1. Comprimento de Arco de uma Curva dada em Coordenadas Polares:

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\,sen\,\theta \end{cases}$$

$$s = \int_{\theta 0}^{\theta 1} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\,d\theta$$

Exemplo: Qual o comprimento da cardioide cujo gráfico está esboçado abaixo?



$$s = \int_{\theta 0}^{\theta 1} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta$$

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{(-sen\ \theta)^2 + (1 + cos\theta)^2} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{sen\ ^2\theta + 1 + cos^2\theta + 2cos\theta}\, d\theta$$

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + cos\theta)} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{2} \sqrt{2cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = \int_0^{\pi} 2cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$s = 2.2sen\frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 4\ u.c.$$

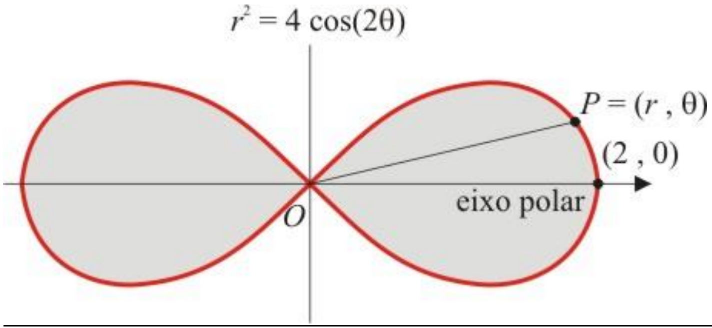
(metade do cardioide)

Logo, o comprimento total do cardioide é 8 u.c.

6.2. Áreas de figuras planas em Coordenadas Polares:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$

Exemplo: Qual a área da lemniscata abaixo?



Para resolver tal problema será considerado um quarto da lemniscata nos intervalos de integração:

$r = 2\sqrt{\cos(2\theta)}$

$$A = 4\left(A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta\right) = 2\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta$$

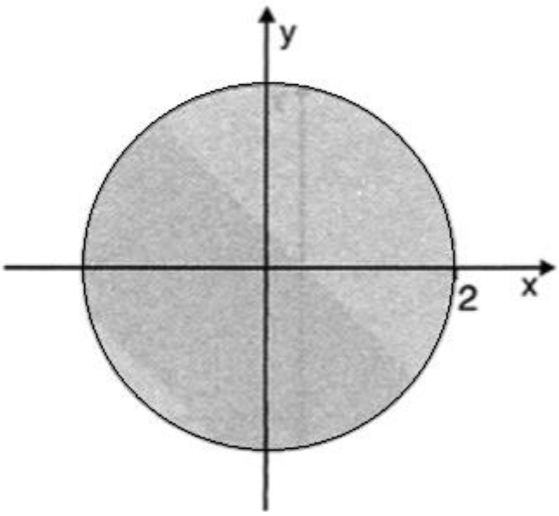
$$A = 2\int_{0}^{\pi/4} \left(2\sqrt{\cos(2\theta)}\right)^2\, d\theta = 2\int_{0}^{\pi/4} 4\cos(2\theta)\, d\theta$$

$$A = [4\,\mathrm{sen}(2\theta)]_0^{\pi/4} = 4 \text{ unidades de área}$$

7. FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS:

Exemplo: Determine o domínio e a imagem da função:

$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$



O domínio é o conjunto de pontos que satisfaz a equação abaixo (não pode existir raiz quadrada negativa):

$4 - x^2 - y^2 \geq 0$

$D(z) = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$

Já a imagem são todos os valores possíveis de z, que está de acordo com o domínio:

$Im(z) = \{z \in R | 0 \leq z \leq 2\}$

7.1. Curvas de Nível:

As curvas de nível são os subconjuntos do domínio da função. Logo, são traçadas no plano xy. Cada curva de nível f(x,y)=k é a projeção, sobre o plano xy, da interseção do gráfico de f com o plano horizontal z=k. A seguir, será dado um exemplo.

Exemplo: Esboce o gráfico e a curva de nível da função do exemplo anterior:

Curvas de nível:

-C_0:

$0 = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ $\quad\quad$ $x^2 + y^2 = 4$

-C_1:

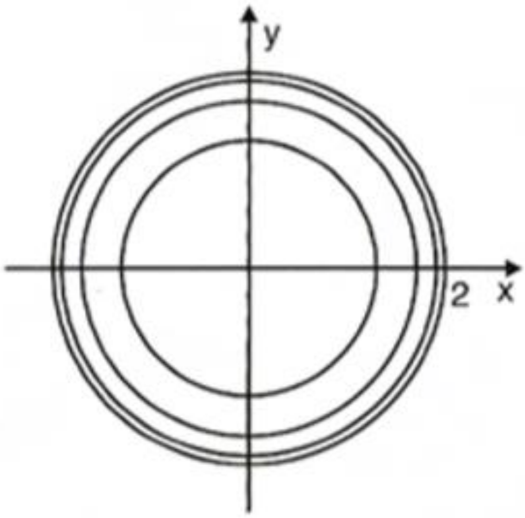
$1 = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ $\quad\quad$ $x^2 + y^2 = 3$

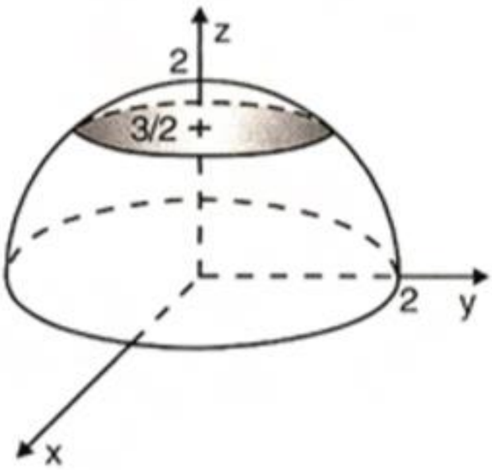
-$C_{1/2}$:

$1/2 = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ $\quad\quad$ $x^2 + y^2 = 15/4$

-$C_{3/2}$:

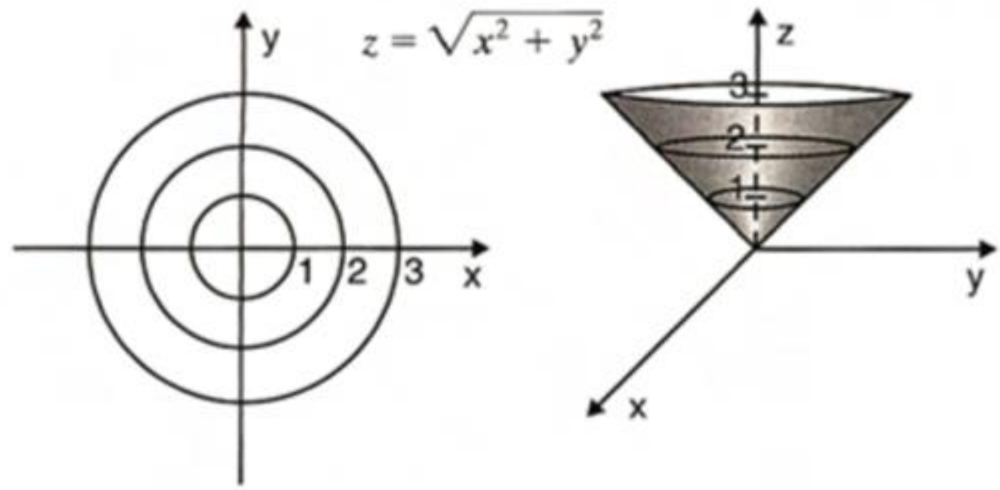
$3/2 = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ $\quad\quad$ $x^2 + y^2 = 7/4$

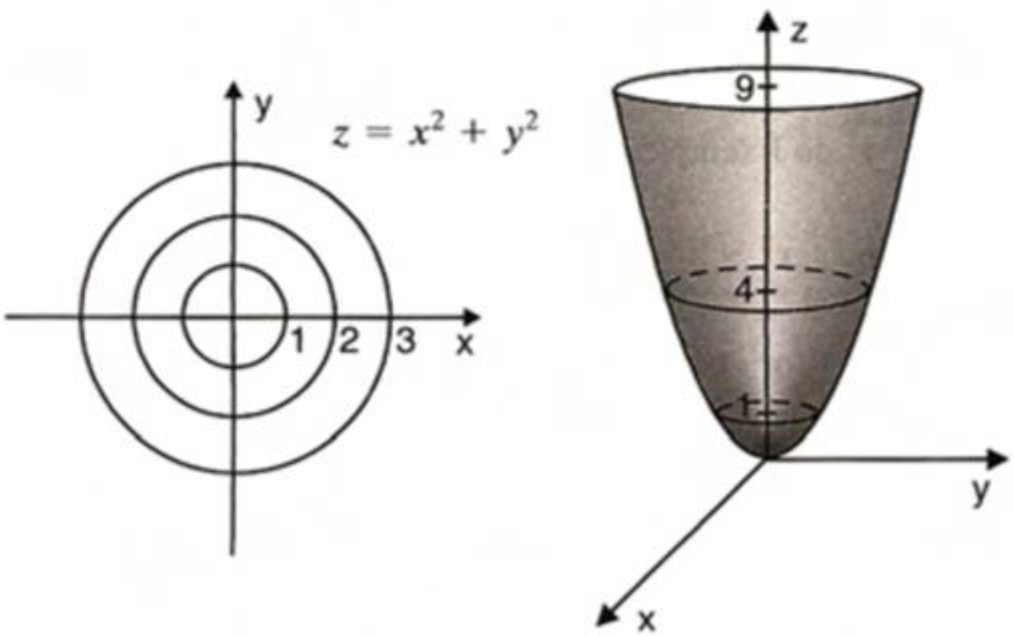




Para k<0 e k>2 as curvas de nível são conjuntos vazios.

Outros exemplos:





Para facilitar o entendimento dos gráficos, utilizar as coordenadas polares.

8. Limite e Continuidade de Funções de Duas Variáveis:

Limite: Com relação a funções de uma variável, só existem duas direções de aproximação: pela direita ou pela esquerda. Logo, se os limites laterais forem diferentes, o limite da função para o ponto determinado não existe.
Já, para as funções de várias variáveis, a situação é um pouco diferente porque existem infinitos caminhos para (x,y) se aproximar de (a,b), sendo que (x,y) esteja no domínio. Então, se dois caminhos diferentes de aproximação ao longo dos quais f(x,y) resulte em limites divergentes, o limite daquela função para aquele ponto não existe.

Exemplo: Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe.

Se (x,y) se aproxima de (0,0) pelo eixo x, temos:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x.0}{x^2+0^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Porém, se (x,y) se aproxima de (0,0) através de pontos da parábola $y = \sqrt{x}$, tem-se:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\sqrt{x}}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

Outro caminho que pode ser usado é transformar as coordenadas cartesianas para as coordenadas polares.

Observação: As propriedades dos limites de funções de uma variável real continuam válidas para os limites de funções de mais de uma variável.
Continuidade: A função é contínua em seu domínio se a função for contínua em todo ponto (a,b) do domínio.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

-Usando as propriedades de limites, pode-se concluir que soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas resultam em funções contínuas
-Os polinômios são funções contínuas.
-Uma função racional é uma razão de polinômios. Logo, toda função racional também é contínua.

Exemplo: Calcule $\lim_{(x,y)\to(1,0)} (x^2y^2 + x^4 + y^3)$

Como $x^2y^2 + x^4 + y^3$ é uma função contínua, para calcular o seu limite é só fazer substituição direta:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} (x^2y^2 + x^4 + y^3) = 1$$

9. DERIVADAS PARCIAIS:

É a derivação para funções de mais de uma variável. Para realizar tal operação escolhe-se uma variável para a derivada e todas as outras são fixadas como constantes.

Definição:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\dots,x_i+h,\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_n)}{h}.$$

Exemplo: Determine a derivada de primeira ordem da função:
$f(x,y) = 2x^2y + 3xy^2 - 4x$

Derivada parcial com relação a x:
$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 3y^2 - 4$

Derivada parcial com relação a y:
$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 6xy$

9.1. Diferenciabilidade:

Uma função diferenciável constitui numa função cuja o gráfico não possui pontos angulosos. Logo, consiste numa curva suave.

Definição:
A função é diferenciável se em determinado ponto as derivadas parciais existirem e se:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{f(x,y) - \left[f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)[x - x_0] + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)[y - y_0] \right]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Exemplo: Determine se $f(x,y) = x^2 + y^2$ é diferenciável.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ Como essas derivadas parciais são contínuas, f(x,y) é diferenciável.

9.2. Plano Tangente:

Definição:
Se a função for diferenciável**:**

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y - b).$$

9.3. Vetor Gradiente:

Definição:

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

9.4. Diferencial:

Definição:
Seja f(x,y) uma função diferenciável em (x0,y0), a diferencial de f em (x0,y0) é:

$$T(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

Exemplo: Determine a diferencial de $z=x^2y$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$

$dz = 2xydx + x^2dy$

A diferencial é utilizada para calcular valores aproximados. Por exemplo, a variação no volume de um cilindro, quando o raio e a altura sofrem uma variação.

9.5. Regra da Cadeia:

É utilizada para calcular a derivada de uma função composta.

Caso I: h(t)=f(x(t),y(t))

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Caso II: h(x,y,z)=f(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}$$

9.6. Derivação de Funções definidas Implicitamente:

z=g(x,y) é definida implicitamente por f(x,y,z)=0

Exemplo: z=x+y é definida implicitamente por x+y-z=0

9.6.1. Derivação de Funções Implícita y=f(x) definida pela equação F(x,y)=0:

Utilizando a regra da cadeia chega-se na relação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Exemplo: Sabendo que a função diferenciável y=f(x) é dada implicitamente pela equação $x^2+y^2=1$ Determine a derivada de y com relação a x.

Definição implícita:

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

Derivando ambos os lados da equação em relação a x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}.\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}.\frac{dy}{dx} = 0 \qquad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}; y \neq 0$$

9.6.2. Derivação de Funções Implícita z=f(x,y) definida pela equação F(x,y,z)=0:

Utilizando a regra da cadeia chega-se na relação:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{-\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{-\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Exemplo: A função diferenciável z=z(x,y) é definida implicitamente pela equação:

$$xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 5$$

Determine:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y}$$

Resolvendo:

$$f(x,y,z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 5 = 0, \quad z = z(x,y)$$

Derivando ambos os lados em relação a x, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$(yz + 3x^2) + \frac{\partial f}{\partial y}.0 + (xy + 3z^2)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(yz + 3x^2)}{xy + 3z^2}$$

Derivando ambos os lados em relação a y, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$(yz + 3x^2).0 + (xz + 3y^2).1 + (xy + 3z^2).\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(xz+3y^2)}{xy+3z^2}$$

9.6.3. Derivadas de funções y=y(x)e z=z(x) definida implicitamente por F(x,y,z)=0 e G(x,y,z)=0:

Utilizando regra de Cramer para encontrar a solução do sistema e usando Jacobiano para simplifica-lo, as equações ficam:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \qquad \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

9.6.4. Derivadas Parcias Sucessivas:

Se z = f(x,y) é uma função de duas variáveis então, em geral, suas derivadas parciais de 1ª ordem são também funções de duas variáveis. Se as derivadas dessas funções existem, elas são chamadas derivadas parciais de 2ª ordem de f.

Para uma função z = f(x,y) temos quatro derivadas parciais de 2ª ordem:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Teorema de Schwartz: Seja z = f(x,y) uma função com derivadas parciais de 2ª ordem contínuas em um conjunto aberto $A \subseteq \mathbb{R}$2. Então:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

9.7. Aplicações:

9.7.1. Máximos e Mínimos de Funções de duas Variáveis:

Definição: Seja z = f(x,y) uma função de duas variáveis. Dizemos que (a,b) ∈ D(f) é ponto de **máximo absoluto ou global** de f, se para todo (x,y) ∈ D f ,f $(x,y) \leq f$(a,b) . Dizemos que f(a,b) é o valor máximo de f.

Definição: Seja z = f(x,y) uma função de duas variáveis. Dizemos que (a,b) ∈ D(f) é ponto de **mínimo absoluto ou global** de f, se para todo (x,y) ∈ D f ,f (x,y)≥ f(a,b) . Dizemos que f(a,b) é o valor mínimo de f.

Definição: $(a,b) \in D(f)$ é **ponto de máximo relativo ou local** de f, se existir uma bola aberta $B((a,b);r)$, tal que $f\ (x,y) \leq f\ (a,b)$, para todo $x,y \in B \cap D\ f$.
Definição: $(a,b) \in D(f)$ **é ponto de mínimo relativo ou local** de f, se existir uma bola aberta $B((a,b);r)$, tal que $f\ (x,y) \geq f\ (a,b)$, para todo $x,y \in B \cap D\ f$.

Definição: Seja $z = f(x,y)$ definida em um conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Um ponto $(a,b) \in U$ é dito **ponto crítico** de f se as derivadas parciais $\partial f/\partial x\ (a,b)$ e $\partial f/\partial y\ (a,b)$ são iguais a zero ou se f não é diferenciável em (a,b). Geometricamente podemos pensar nos pontos críticos de uma função $z = f(x,y)$ como os pontos em que seu gráfico não tem plano tangente ou o plano tangente é horizontal.

Observação: Vamos ver que os pontos extremantes de z=f(x,y) são pontos críticos. No entanto, um ponto crítico nem sempre é um ponto extremante. Um ponto crítico que não é ponto extremante é chamado **ponto de sela**.

Condição Necessária para a Existência de Pontos Extremantes:

Proposição: Seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável em um conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Se $(a,b) \in U$ é um ponto extremante local (ponto de máximo ou mínimo local), então: $\boldsymbol{\partial f/\partial x(a,b) = 0}$ e $\boldsymbol{\partial f/\partial y(a,b) = 0}$, isto é, (a,b) é um ponto crítico de f.

Condição Suficiente para um Ponto Crítico ser Extremante Local Proposição:

Seja $z=f(x,y)$ uma função cuja derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem são contínuas em um conjunto aberto que contém (a,b) e suponhamos que $\boldsymbol{\partial f/\partial x(a,b) = 0 = \partial f/\partial y(a,b)}$, ((a,b) − ponto crítico de f). Seja o determinante Hessiano $H(x,y)$:

$$\boldsymbol{H(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix}$$

Temos que:
a) Se $H(a,b) > 0$ e $\partial^2 f/\partial x^2\ (a,b) > 0$, então (a,b) é um ponto de mínimo local de f.
b) Se $H(a,b) > 0$ e $\partial^2 f/\partial x^2\ (a,b) < 0$, então (a,b) é um ponto de máximo local de f.
c) Se $H(a,b) < 0$, então (a,b) não é extremante local. Neste caso $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ é um ponto de sela.
d) Se $H(a,b) = 0$, nada pode-se afirmar.

Teorema de Weierstrass:

Seja $f{:}A \subseteq \mathbb{R}2 \rightarrow\subseteq \mathbb{R}, z = f(x,y)$ uma função contínua no conjunto fechado e limitado A. Então existem $P1$ e $P2 \in A$, tais que $f(P1) \leq f(P) \leq f(P2)$, para qualquer que seja $P \in A$.
Observação: Este Teorema é de grande importância para a resolução de problemas em que necessitamos analisar pontos extremos pertencentes à fronteira de um conjunto. Ele garante a existência do ponto máximo e do ponto mínimo de uma função contínua num domínio fechado e limitado.

Exemplo: Quais as dimensões de uma caixa retangular sem tampa com volume de 4 m^3 e com a menor área de superfície possível?
Tem-se:
Volume da caixa: V=xyz
Área da superfície total: S=2xxz+2yz+xy
Nosso objetivo é minimizar a função S=2xxz+2yz+xy sabendo que V=xyz=4 e que x,y,z > 0.
Como V=xyz=4, podemos isolar z em função de x e y, obtendo uma função de duas variáveis z = f(x,y) = 4/xy.
Substituindo z=4/xy em S=2xxz+2yz+xy, obtemos S =8/y+8/x+xy; x,y>0.
Logo nosso problema se resumi em minimizar a função: S =8/y+8/x+xy; x,y>0
Inicialmente procuramos os pontos críticos. $\partial S/\partial x = -8/x^2 + y$ e $\partial S/\partial y = -8/y^2 + x$
Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} -\frac{8}{x^2} + y = 0 \\ -\frac{8}{y^2} + x = 0 \end{cases}$$

Obtém-se o ponto (2,2).

Utilizando o determinante Jacobiano para classificar tal ponto:

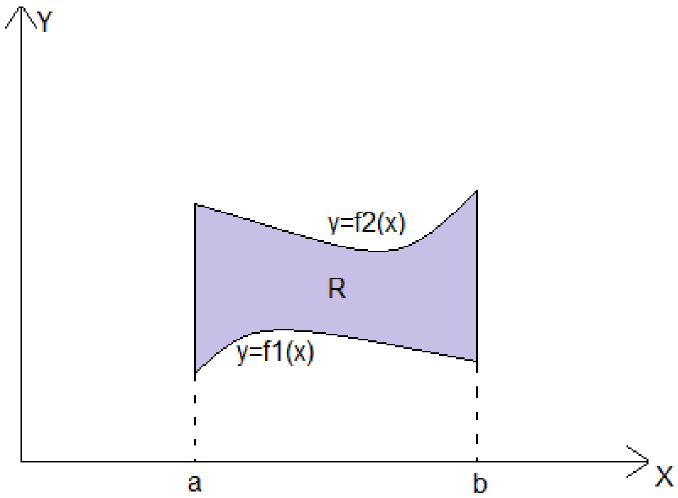
$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{16}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{16}{y^3} \end{vmatrix} = \frac{256}{(xy)^3} - 1$$

Logo H(2,2)=3>0
Logo (2,2) é um ponto de mínimo e as dimensões da caixa são:
X=2m y=2m z=2m

10. INTEGRAIS DUPLAS:

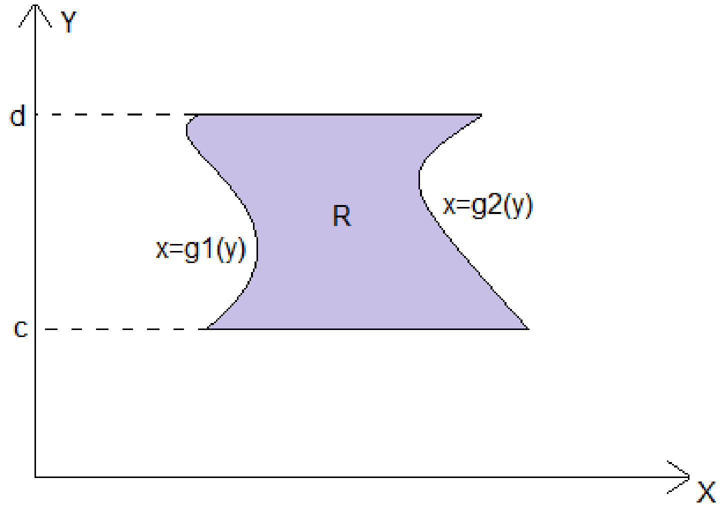
É uma extensão do conceito de integral definida para as funções de duas variáveis. Por meio dela, analisa-se diversas situações envolvendo cálculos de áreas e volumes e será determina-se algumas grandezas físicas, tais como massa e momento de inércia.

10.1. R é do Tipo I:



$$\int_a^b \int_{f1(x)}^{f2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

10.2. R é do Tipo II:

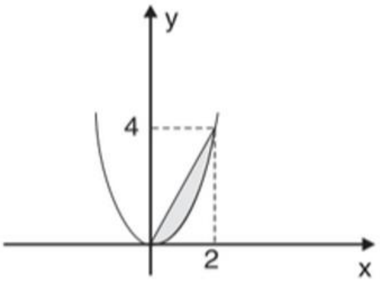


$$\int_{c}^{d}\int_{g1(y)}^{g2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Exemplo: Calcule a integral:

$$\iint_R (x+y)\,dA$$

Onde R é a região delimitada por $y=x^2$ e $y=2x$, representada abaixo pelo gráfico:



Solução 1:

$$\iint_R (x+y)\,dA = \int_0^2\int_{x^2}^{2x} (x+y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(xy+\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{2x}\right)dx$$

$$\int_0^2 \left(x(2x-x^2)+\frac{1}{2}(4x^2-x^4)\right)dx = \frac{52}{15}$$

Solução 2:

$$\iint_R (x+y)dA = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x+y)dxdy = \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} + yx\right) \Big|_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dy$$

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{2}\left(y - \frac{y^2}{4}\right) + y\left(\sqrt{y} - \frac{y}{2}\right)\right)dy = \frac{52}{15}$$

10.3. Mudança de Variáveis em Integrais Duplas:

A mudança de variáveis é sempre utilizada para facilitar o cálculo da integral dupla. Para isso, utiliza-se o Jacobiano, que é uma medida de quanto a transformação modifica a área de uma região.

$$\iint f(x,y)dxdy = \iint f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Sendo o determinante Jacobiano:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

10.3.1. Coordenadas Polares:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r sen\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r sen\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = sen\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

Calculando o Jacobiano:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -rsen\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

A integral fica:

$$\iint f(x,y)dxdy = \iint f(x(r,\theta), y(r,\theta))rdrd\theta .$$

11. INTEGRAIS TRIPLAS:

As funções integrando, nesse caso, é uma função de três variáveis w=f(x,y,z) definida sobre uma região T do espaço tridimensional. A ideia é a mesma da Integral Dupla.

11.1. Região Sólida Tipo I:

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA$$

11.2. Região Sólida Tipo II:

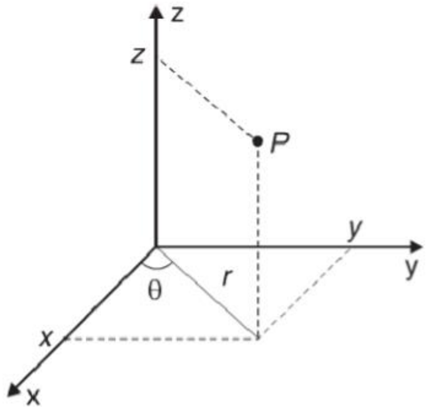
$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left[\int_{g(y,z)}^{h(y,z)} f(x,y,z)dx \right] dA$$

11.3. Região Sólida Tipo III:

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left[\int_{g(x,z)}^{h(x,z)} f(x,y,z)dy \right] dA$$

11.4. Mudança de Variáveis em Integrais Triplas:

11.4.1. Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas:



$$x = r\cos\theta, \quad y = rsen\theta, \quad z = z$$

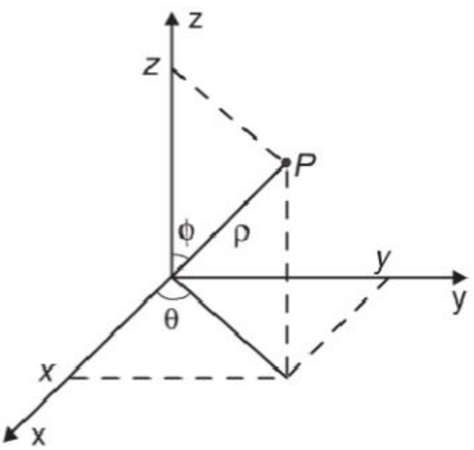
O jacobiano é dado por:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -rsen\theta & 0 \\ sen\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

A Integral Tripla fica:

$$I = \iiint_E f(x,y,z)dV = \iiint_{E'} f(r\cos\theta, rsen\theta, z)rdrd\theta dz$$

11.4.2. Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas:



$$x = \rho sen\phi\cos\theta, \; y = \rho sen\phi sen\theta, \; z = \rho\cos\phi$$

O jacobiano é dado por:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} sen\phi\cos\theta & -\rho\, sen\phi\, sen\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ sen\phi sen\theta & \rho\, sen\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\, sen\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho sen\phi \end{vmatrix} = \rho^2 sen\phi$$

A Integral Tripla fica:

$$\iiint_{T'} f(\rho sen\phi\cos\theta, \rho sen\phi sen\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta$$

REFERÊNCIAS:

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo B**. 2. ed.

O Baricento da Mente, Integração por Substituição Trigonométrica. Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/06/integracao-por-substituicao.html> Acesso em 2 de janeiro de 2015.

Wikipédia, Integral Imprópria. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Integral_impr%C3%B3pria> Acesso em 12 de janeiro de 2015.

Wikipédia, Coordenadas Polares. Disponível em:

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_polares> Acesso em 23 de janeiro de 2015.

O Baricento da Mente, Área em Coordenadas Polares. Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/03/area-em-coordenadas-polares.html> Acesso em 24 de janeiro de 2015.