

PET-CEM

Apostila de Cálculo Vetorial

Iury de Araujo

Sumário

1	Unidade I	5
1.1	Operações Vetoriais	5
1.1.1	Adição e subtração	5
1.1.2	Multiplicações Vetoriais	5
1.2	Equações Paramétricas de Retas, Planos e outras Superfícies	6
1.2.1	Retas	6
1.2.2	Planos	8
1.2.3	Superfícies	9
1.3	Parametrização e Curvas Espaciais	12
1.4	Funções Vetoriais e Cálculos de Campos Vetoriais	15
1.4.1	Aplicação do Cálculo Diferencial e Integral às Funções Vetoriais	16
1.5	Comprimento de Arco	17
1.6	Integrais de Linha	17
1.7	Integrais de Linha de Campos Vetoriais	21
2	Unidade II	23
2.1	Teorema Fundamental das Integrais de Linha	23
2.2	Teorema de Green	25
2.3	Superfícies Paramétricas e Suas Áreas	27
2.4	Gradiente, Divergente e Rotacional	29
2.4.1	O Operador Nabla	30
2.4.2	Gradiente de Funções (Escalares)	30
2.4.3	Divergente	31
2.4.4	Rotacional	31
3	Unidade III	33
3.1	Integrais de Superfície	33
3.2	Integrais de Superfície de Campos Vetoriais	34
3.3	O Teorema de Stokes	37
3.4	Teorema da Divergência	40

Com o intuito de auxiliar no aprendizado de algumas disciplinas o grupo PET-CEM resolveu incluir em suas atividades o desenvolvimento de algumas apostilas. Tais apostilas foram feitas em cima da ementa da matéria de interesse, bem como do seu livro texto.

Como mencionado acima, o objetivo desta apostila é auxiliar os estudos, em momento algum o aluno deve deixar de lado a leitura do livro texto e o aproveitamento em sala de aula com o professor.

Esta apostila contém somente as principais fórmulas do cálculo vetorial, sem suas deduções nem condições de uso. Portanto, para a leitura da mesma, é tido como pré-suposto que o graduando já tenha em mente o que existe por traz dessas "simples fórmulas".

Com isso, é fundamental, antes do apoio desta apostila, que o aluno já tenha tido um contato mais completo com a matéria.

Capítulo 1

Unidade I

1.1 Operações Vetoriais

As operações vetoriais, tais como as escalares, são: adição; subtração; e multiplicação. Esta última podendo ser escalar ou vetorial, como veremos no decorrer do capítulo.

1.1.1 Adição e subtração

São as operações mais simples a serem feitas, apenas sendo somados os vetores termo a termo.

Exemplo 1 (Adição e Subtração vetoriais) Sendo, $\vec{u} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ e $\vec{v} = \langle 3, 2, 1 \rangle$, calcule :

a) $u+v$:

$$u+v = \langle 1, 2, 3 \rangle + \langle 3, 2, 1 \rangle$$

$$u+v = \langle 1+3, 2+2, 3+1 \rangle$$

$$u+v = \langle 4, 4, 4 \rangle$$

b) $u-v$:

$$u-v = \langle 1, 2, 3 \rangle - \langle 3, 2, 1 \rangle$$

$$u-v = \langle 1-3, 2-2, 3-1 \rangle$$

$$u-v = \langle -2, 0, 2 \rangle$$

1.1.2 Multiplicações Vetoriais

São duas as operações possíveis: a primeira resulta um escalar, e por isso chamada de Multiplicação Escalar Vetorial; já a segunda tem como resultado um vetor e por isso se diz que é uma Multiplicação Vetorial.

Na escalar, tem-se a multiplicação, termo a termo, dos vetores, para então a soma desses resultados.

Exemplo 2 (Produto Escalar Vetorial) Sendo, $\vec{u} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ e $\vec{v} = \langle 3, 2, 1 \rangle$, calcule :

$$\begin{aligned} a) u \cdot v : \\ u \cdot v &= \langle 1, 2, 3 \rangle \cdot \langle 3, 2, 1 \rangle \\ u \cdot v &= 1 * 3 + 2 * 2 + 3 * 1 \\ u \cdot v &= 10 \end{aligned}$$

Quanto à multiplicação vetorial, existe mais de uma maneira de ser calculada. Aqui será apresentada aquela que é conhecida como o método "da primeira linha". É interessante lembrar, que esta operação fornece o vetor normal aos vetores calculados.

Exemplo 3 (Multiplicação Vetorial) Sendo, $\vec{u} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ e $\vec{v} = \langle 3, 2, 1 \rangle$, calcule :

$$\begin{aligned} a) u \times v : \\ u \times v &= \langle 1, 2, 3 \rangle \times \langle 3, 2, 1 \rangle \\ u \times v &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ u \times v &= \vec{i} * (2 * 1 - 3 * 2) - \vec{j} * (1 * 1 - 3 * 3) + \vec{k} * (1 * 2 - 2 * 3) \\ u \times v &= -4 \vec{i} + 9 \vec{j} - 4 \vec{k} \end{aligned}$$

1.2 Equações Paramétricas de Retas, Planos e outras Superfícies

1.2.1 Retas

A equação de uma reta pode ser obtida por um ponto r_0 , pertencente à reta, e o vetor diretor da mesma, ou seja, aquele que dará a direção para a reta. Sendo assim, a equação vetorial de uma reta tem a forma:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \vec{\mathbf{v}}$$

Sendo:

- \mathbf{r}_0 , um ponto pertencente à reta;
- t , parâmetro, ou variável, onde cada valor dado para o mesmo fornece uma posição, \mathbf{r} , na
- $\vec{\mathbf{v}}$, vetor diretor da reta.

A notação usada para o vetor diretor foi só para uma melhor visualização da equação. Mas, deve-se lembrar de que estamos tratando de cálculo vetorial, ou seja, os termos \vec{r} e \vec{r}_0 , também são vetores. Eles são, para esclarecimento, vetores que fornecem a posição de um ponto na reta em relação à origem do sistema de coordenadas.

Exemplo 4 *Determine a equação paramétrica da reta que passa pelos pontos $(4, -1, 2)$ e $(1, 1, 5)$.*

→ São dados dois pontos pertencentes a reta.

→ Um deles será diretamente usado da equação de parametrização.

→ Ambos os pontos serão usados para definir um vetor diretor da reta.

→ Feito isso, basta colocar os resultados obtidos na equação de parametrização e o problema estará resolvido.

$$\vec{r}_0 = \langle 4, -1, 2 \rangle$$

$$\vec{v} = (1, 1, 5) - (4, -1, 2) = \langle 1 - 4, 1 - (-1), 5 - 2 \rangle$$

$$\vec{v} = \langle -3, 2, 3 \rangle$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

$$\vec{r} = \langle 4, -1, 2 \rangle + t \langle -3, 2, 3 \rangle$$

$$r(t) = \langle 4 - 3t, 2t - 1, 3t + 2 \rangle$$

Exemplo 5 *Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 2, 4)$ e é perpendicular ao plano $2x - y + 5z = 12$.*

→ É fornecido um ponto pertencente a reta e é dito que a mesma é perpendicular a um plano.

→ Temos um ponto na reta, nos falta somente um vetor diretor, aqui chamado de \vec{v} , para a mesma. Como foi dito que ela é ortogonal ao plano, logo seu vetor \vec{v} poderá ser o vetor normal do plano, aqui chamado de \vec{n} .

→ Sabendo disso e por inspeção à equação do plano que foi fornecida, temos o vetor \vec{v} da reta.

→ Caso o leitor não se lembre, o vetor \vec{n} do plano é facilmente obtido inspecionando os coeficientes das variáveis x, y e z , da equação do plano. No caso o vetor normal será: $\vec{n} = \langle 2, -1, 5 \rangle$.

→ Tendo essas informações, basta substituir na equação da reta.

$$\vec{r}_0 = \langle -2, 2, 4 \rangle$$

$$\vec{n} = \vec{v} = \langle 2, -1, 5 \rangle$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$$

$$\vec{r} = \langle -2, 2, 4 \rangle + t \langle 2, -1, 5 \rangle$$

$$r(t) = \langle 2t - 2, 2 - t, 5t + 4 \rangle$$

1.2.2 Planos

Para determinar a equação de um plano são necessários, um ponto pertencente ao mesmo e o seu vetor normal. Assim sendo, definimos um ponto genérico no plano e dizemos que o vetor formado pelos pontos no plano, o genérico e o tido, será ortogonal ao vetor normal do plano. Ou seja, matematicamente, temos que:

$$\mathbf{n} \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

Considerando um espaço tridimensional e expandindo os termos com as operações vetoriais, ficamos com:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{n} &= \langle a, b, c \rangle, \text{ um vetor normal ao plano;} \\ \rightarrow \mathbf{r}_0 &= \langle x_0, y_0, z_0 \rangle, \text{ um ponto pertencente ao plano;} \text{ e} \\ \rightarrow \mathbf{r} &= \langle x, y, z \rangle, \text{ um ponto genérico do plano.} \end{aligned}$$

Exemplo 6 *Determine a equação do plano que passa pelo ponto $(2, 1, 0)$ e é paralelo a $x + 4y - 3z = 1$.*

→ Ponto pertencente ao plano é dado.

→ É dito que é paralelo a outro plano. Com isso, podemos usar o vetor normal do plano fornecido para obter a equação do novo plano.

$$\vec{r}_0 = \langle 2, 1, 0 \rangle$$

$$\vec{n} = \langle 1, 4, -3 \rangle$$

$$\begin{aligned} a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) &= 0 \\ 1(x-2) + 4(y-1) - 3(z-0) &= 0 \\ x-2 + 4y-4 - 3z &= 0 \\ x + 4y - 3z &= 6 \end{aligned}$$

Exemplo 7 *Determine a equação do plano que passa por $(3, -1, 1)$, $(4, 0, 2)$ e $(6, 3, 1)$.*

→ Três pontos no plano são dados.

→ Naturalmente um será usado como ponto dado do plano.

→ E utilizaremos os três para definir um vetor normal ao plano.

→ O vetor normal será definido com o multiplicação vetorial de dois vetores contidos nos planos, estes vetores serão formados por esses três pontos fornecidos.

$$\vec{r}_0 = \langle 3, -1, 1 \rangle$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \vec{n}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \langle 3, -1, 1 \rangle - \langle 4, 0, 2 \rangle = \langle -1, -1, -1 \rangle \\ \vec{w} &= \langle 6, 3, 1 \rangle - \langle 4, 0, 2 \rangle = \langle 2, 3, -1 \rangle \\ \vec{u} \times \vec{w} &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \\ \vec{u} \times \vec{w} &= \langle 4, -3, -1 \rangle \\ \vec{n} &= \langle 4, -3, -1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ 4(x - 3) - 3(y + 1) - (z - 1) &= 0 \\ 4x - 12 - 3y - 3 - z + 1 &= 0 \\ 4x - 3y - z &= 14 \end{aligned}$$

1.2.3 Superfícies

Nesta seção, serão apresentadas algumas superfícies fundamentais, usadas na matéria.

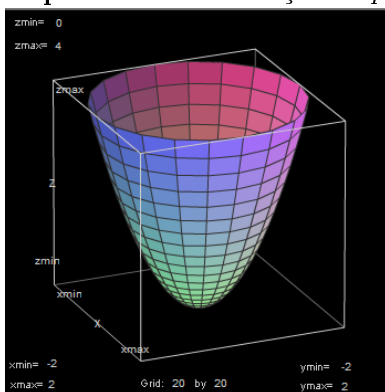
Quádricas

Consiste em superfícies tridimensionais, formadas por equações do segundo grau. Essas superfícies podem ser parametrizadas da forma:

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= z(x, y) \end{aligned}$$

A função dependente de x e y , neste caso, terá a forma de uma das funções quádricas: parábola, hipérbole ou elipse. Esta é obtida, apenas isolando a variável z na equação.

Exemplo 8 *Parametrização do parabolóide $x^2 + y^2 - z = 0$, mostrado abaixo:*



→Através da imagem, verificam-se duas informações importantes. 1) Temos uma parábola em z . 2) Temos circunferências no plano xOy .

→Serão mostradas duas parametrizações, uma com coordenadas retangulares e outra com coordenadas polares.

Coordenada retangular

→Esta será feita conforme o apresentado nesta seção.

→Serão usados x e y como parâmetros e também uma função $z(x, y)$.

→Para tal basta isolar z na equação fornecida.

Assim,

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - z &= 0 \\z &= x^2 + y^2\end{aligned}$$

Com isso,

$$r(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x, y) \end{cases}$$

$$r(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

→Embora os limites não tenham sido especificados, estes podem ser encontrados fazendo $x^2 + y^2 = r^2$, onde r é o raio do círculo no plano xOy .

→Com isso, vê-se facilmente que x e y variarão de $-r$ à $+r$.

Usando Coordenadas Polares

→Para fazer a parametrização tendo r e θ como parâmetros, sendo r o raio do círculo em xOy e θ o ângulo entre o raio e x . Faz-se $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sen(\theta)$.

Ficando,

$$r(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$r(r,\theta) = \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = r^2 \end{cases}$$

→ Com isso temos $\theta \in [0, 2\pi]$ e para acharmos o raio devemos substituir em $z = r^2$ os limites conhecidos de z .

Cilíndricas

Superfícies cilíndricas são normalmente expressas em coordenadas cilíndricas, por questões de simplicidade dos cálculos. Mas, também, podendo ser expressas em retangulares. Em coordenadas retangulares, temos:

$$\begin{cases} x = x \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} \\ z = z \end{cases}$$

Já, em coordenadas cilíndricas ficamos com as seguintes equações:

$$\begin{cases} x = r * \cos(\theta) \\ y = r * \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Sendo:

- r , o raio do cilindro, uma constante;
- $\theta, \theta \in [0, 2\pi]$
- z , a "altura", z , do cilindro

Cônicas

Superfícies cônicas têm uma parametrização bastante parecida com a de uma superfície cilíndrica. Sendo a diferença, que: em um cilindro o raio é uma constante; e em um cone ele varia de forma linear com a altura do cone. Sendo assim, podemos fazer:

$$\begin{cases} x = r(z) * \cos(\theta) \\ y = r(z) * \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

]

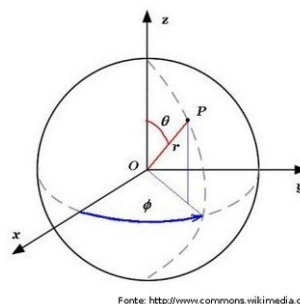
Sendo:

- r , o raio do cone, agora uma variável que depende da altura do mesmo;
- $\theta, \theta \in [0, 2\pi]$;
- z , a "altura", z , do cone.

Esféricas

Embora dê de parametrizar uma esfera pelo modo apresentado na seção das superfícies quádricas, é muito mais conveniente, para efeito de cálculos, parametrizá-las em coordenadas esféricas. Ficando:

$$\begin{aligned}x &= r * \text{sen}(\theta) \cos(\phi) \\y &= r * \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \\z &= r * \cos(\theta)\end{aligned}$$



Sendo:

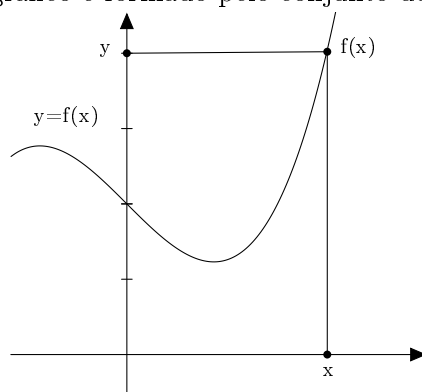
- r, o raio da esfera;
- ϕ , menor ângulo entre x e $r * \text{sen}(\theta)$, $\phi \in [0, 2\pi]$;
- θ , menor ângulo entre ρ e z , $\theta \in [0, \pi]$

1.3 Parametrização e Curvas Espaciais

É usual representar funções no plano por:

$$y = f(x), x = g(y)$$

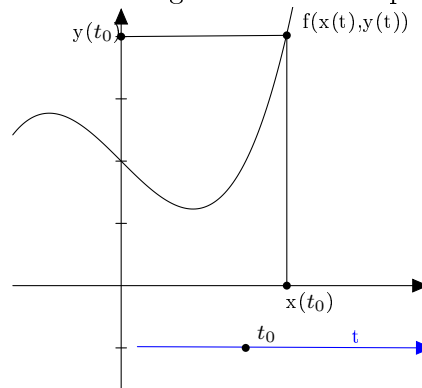
onde x é a variável independente e y é a variável dependente. Neste caso, o gráfico é formado pelo conjunto dos pontos da forma $(x, f(x))$.



Agora vamos usar um parâmetro independente adicional t para descrever x e y , assim :

$$f(x(t), y(t)) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Neste caso o gráfico é formado pelo conjunto dos pontos da forma $(x(t), y(t))$.



Para o caso de curvas espaciais temos:

$$f(x(t), y(t), z(t)) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \text{ é o parâmetro.}$$

As vantagens de usar esse tipo de representação são:

1. Algumas curvas são melhor representadas quando colocamos x e y em função de uma terceira variável.
2. Do mesmo modo algumas vezes é melhor usar um novo sistema de coordenadas.

Exemplo 9 Em coordenadas retangulares o círculo de raio 2 é representado por $x^2 + y^2 = 2^2$.

Neste caso temos duas funções implícitas de x .

$$f(x) = \begin{cases} y = \sqrt{2^2 - x^2} & \text{parte superior} \\ y = -\sqrt{2^2 - x^2} & \text{parte inferior} \end{cases}$$

Observando a Figura 1, percebemos que os pontos do círculo podem ser representados por:

$$r(t) = \begin{cases} x = r \cos(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y = r \sin(t) & r = \text{cte} \end{cases}$$

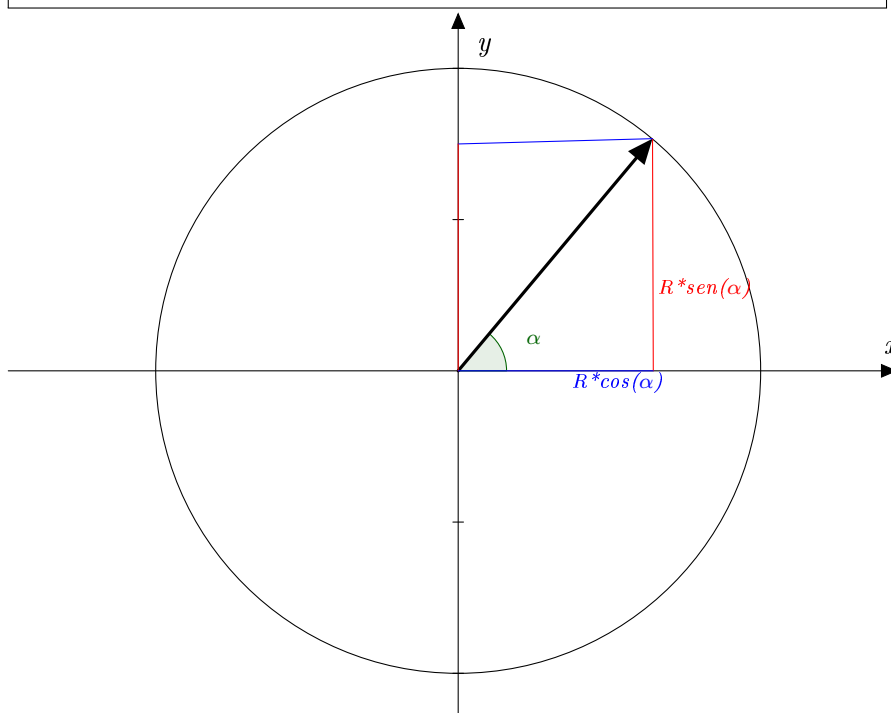


Figura 1

Essa é a representação paramétrica do círculo.

1.4 Funções Vetoriais e Cálculos de Campos Vetoriais

É interessante colocar a definição dessas funções segundo James Stewart:

"Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento do seu domínio um elemento de sua imagem. Uma **função vetorial**, ou **função de valor vetorial**, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais

e cuja imagem é um conjunto de vetores. Em particular estamos interessados em funções \mathbf{r} cujos valores são vetores tridimensionais. Isso significa que para todo número t no domínio de \mathbf{r} existe um único vetor de V_3 denotado por $\mathbf{r}(t)$. Se $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ são os componentes do vetor $\mathbf{r}(t)$, então f , g e h são funções de valor real chamadas de **funções componentes** de \mathbf{r} e escrevemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \langle f(t), g(t), h(t) \rangle \\ \mathbf{r}(t) &= f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}\end{aligned}$$

"

Campos vetoriais são campos que associam a cada ponto do seu espaço um vetor. Neste capítulo serão vistos conceitos de cálculos para esses campos que são expressos por funções vetoriais.

1.4.1 Aplicação do Cálculo Diferencial e Integral às Funções Vetoriais

→ O limite de uma função vetorial é calculado fazendo o mesmo limite para cada uma de suas funções componentes.

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r} = \langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \rangle$$

→ A derivada de uma função vetorial é calculada fazendo a derivada de cada uma de suas funções componentes.

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

→ A integral de uma função vetorial é calculada fazendo a integral para cada uma de suas funções componentes.

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \langle \int_a^b f(t) dt, \int_a^b g(t) dt, \int_a^b h(t) dt \rangle$$

1.5 Comprimento de Arco

Para uma curva em coordenadas cartesianas, temos:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{dy}{dx}} dx$$

Supondo uma curva \mathbf{C} descrita pelos parâmetros $x = f(t)$ e $y = g(t)$, com $t \in [\alpha, \beta]$ e $f'(t) > 0$, que quer dizer que \mathbf{C} é percorrida somente uma vez, temos:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} f'(t) dt$$

Theorem 1 Se uma curva \mathbf{C} for descrita por $x = f(t)$ e $y = g(t)$, onde $t \in [\alpha, \beta]$, onde f' e g' são contínuas em $[\alpha, \beta]$ e \mathbf{C} é percorrida somente uma vez quanto t varia de α até beta então o comprimento de \mathbf{C} é dado por:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt$$

Exemplo 10 Comprimento de um círculo

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt \\ L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d(r\text{sen}(t))}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(r\text{cos}(t))}{dt}\right)^2} dt \\ L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(r\text{cos}(t))^2 + (-r\text{sen}(t))^2} dt \\ &\vdots \\ L &= 2\pi r \end{aligned}$$

(1.1)

1.6 Integrais de Linha

As integrais de linha se assemelham às integrais já vistas em outros cálculos. Sua diferença é que não é mais calculada em um intervalo $[a, b]$, mas sim ao longo de uma curva \mathbf{C} . Para o cálculo de uma integral de linha, a mesma será reduzida a uma integral normal. Para tal será utilizada a noção de comprimento de arco.

Theorem 2 Se f é definida sobre uma curva lisa C , então a **integral de linha de f sobre C** é:

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\Delta x_i, \Delta y_i) \Delta s_i$$

Se esse limite existir.

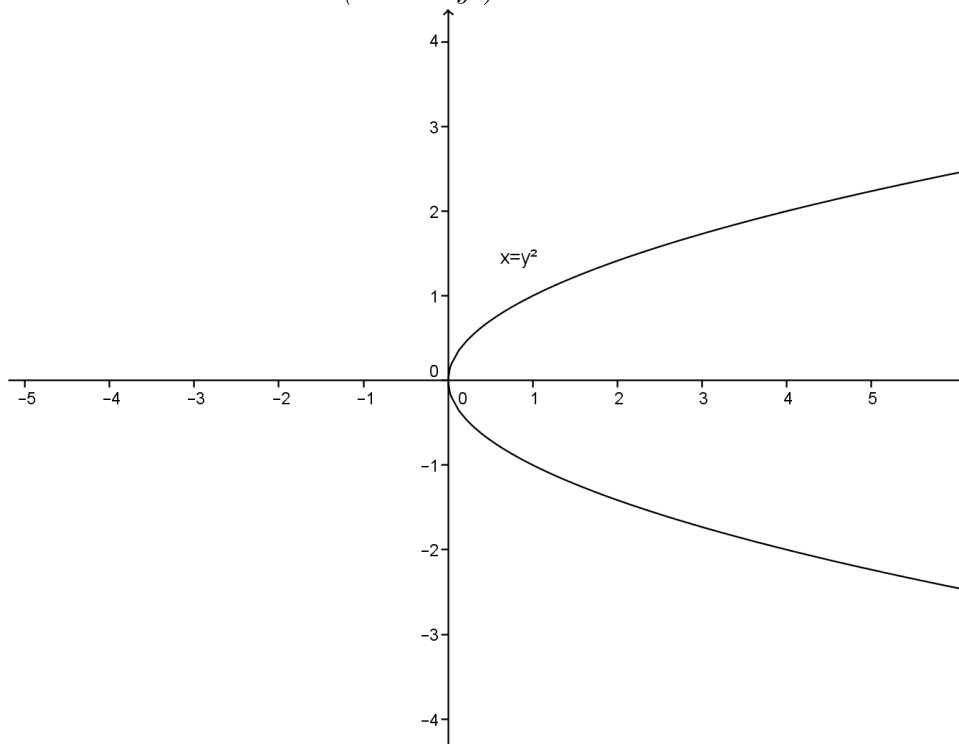
Tente pensar que as integrais de linha são as infinitas somas, e por isso integral, de pequenas variações da função multiplicadas pelo comprimento de arco "andado" com essas variações.

Com isso, podemos introduzir o conceito de comprimento de arco na integral de linha e assim, reduzi-la a uma integral simples, que irá variar de acordo com a parametrização da curva C .

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt$$

Repare que agora temos um parâmetro que descreve a curva, nesse caso chamado de t . Repare também que ao parametrizar a curva, fazendo $x = x(t)$ e $y = y(t)$, também foram substituídas as variáveis x e y da função, por suas respectivas parametrizações. Para um melhor entendimento, seguem alguns exemplos:

Exemplo 11 Calcule a integral de linha da da função $f = y$, com $x \in [0, 2]$, com a curva mostrada abaixo ($C : x = y^2$):



→ Se observarmos, veremos que a curva já é dada parametrizada, com:

$$r(x) = \begin{cases} x = x \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

→ Para seguir uma notação padrão, utilizaremos a variável t para a parametrização. Ficando:

$$r(t) = \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$$

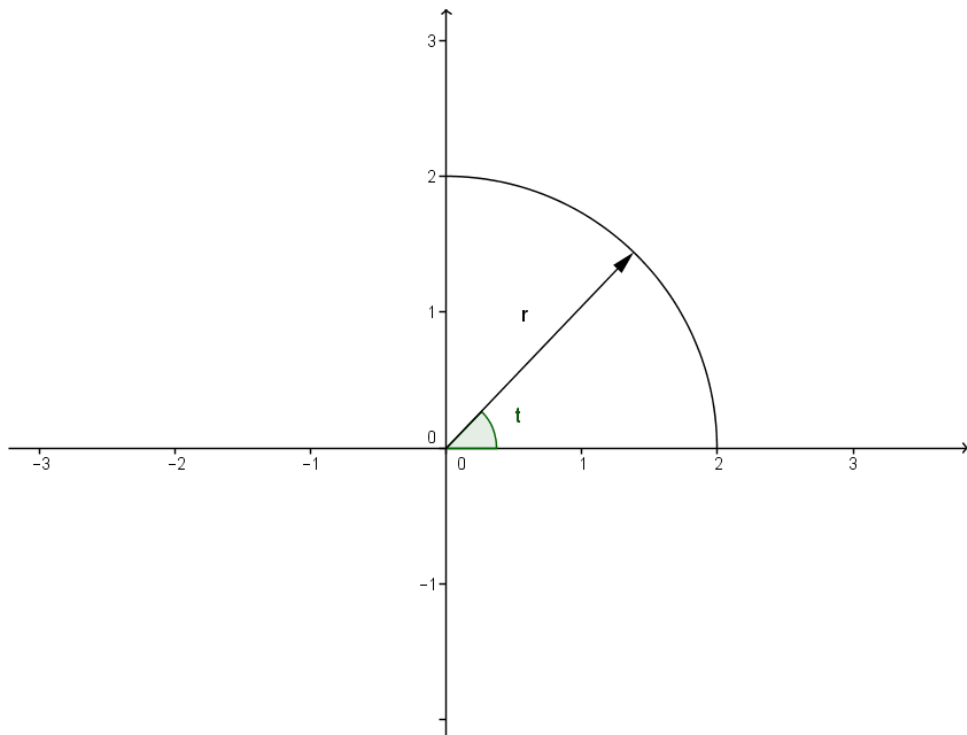
→ Tendo a função escalar, $f = y$, e a parametrização da curva. Para o cálculo da integral de linha basta utilizar a definição.

Segue a resolução:

→ Como as questões de integrais de linha exigem uma série de passos para a concretização do cálculo. Calcularemos antes algumas informações que serão usadas na integral.

$$\begin{aligned} r(t) &= \langle t; \sqrt{t} \rangle \\ f(r(t)) &= \sqrt{t} \\ r'(t) &= \left\langle 1; \frac{1}{\sqrt{t}} \right\rangle \\ |r'(t)| &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2} \\ \int_C f(x, y) ds &= \int_t f(r(t)) |r'(t)| dt \\ \int_C f(x, y) ds &= \int_t (\sqrt{t}) \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt \\ \int_C f(x, y) ds &= \int_0^2 (\sqrt{t}) \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right) + (1)} dt \\ &\vdots \\ \int_C f(x, y) ds &= \int_0^2 \sqrt{t+1} dt \\ &\vdots \\ \int_C f(x, y) ds &= \frac{3}{2} \left[(1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 \\ &\vdots \\ \int_C f(x, y) ds &= \frac{3}{2} (\sqrt{27} - 1) \end{aligned}$$

Exemplo 12 Calcule a integral de linha da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre a porção do primeiro quadrante de um círculo de raio $r = 2$ com o centro na origem.



→É notória a conveniência, não a obrigatoriedade, do uso de coordenadas polares.

→Para este caso, temos que:

$$r(t) = \begin{cases} x = r\cos(t) & f(x, y) = x^2 + y^2 \\ y = r\sin(t) & f(x(t), y(t)) = (r\cos(t))^2 + (r\sin(t))^2 \\ & f(r(t)) = r^2 \end{cases}$$

Assim sendo, ficamos com:

$$\begin{aligned} r(t) &= \langle 2\cos(t); 2\sin(t) \rangle \\ f(r(t)) &= 4 \\ r'(t) &= \langle -2\sin(t); 2\cos(t) \rangle \\ |r'(t)| &= \sqrt{4(\sin^2(t) + \cos^2(t))} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_C f(x, y) ds &= \int_t^t f(r(t)) |r'(t)| dt \\
\int_C f(x, y) ds &= \int_t^t (4)(2) dt \\
\int_C f(x, y) ds &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \\
&\vdots \\
\int_C f(x, y) ds &= 8 [t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\vdots \\
\int_C f(x, y) ds &= 4\pi
\end{aligned}$$

1.7 Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Theorem 3 Seja \mathbf{F} um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva lisa C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Então a integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C é:

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) dt$$

Exemplo 13 Calcule a integral de linha do campo vetorial F sobre a curva C , $t \in [0, 1]$. Sendo:

$$\begin{aligned}
F &= \langle x^2 y^3, -y\sqrt{x} \rangle \\
C : \mathbf{r}(t) &= \langle t^2, t^3 \rangle
\end{aligned}$$

→ A parametrização da curva já foi dada. Com isso, podemos fazer $F(\mathbf{r}(t))$.

→ Com a finalidade de organizar as informações tidas, serão calculados $F(\mathbf{r}(t))$ e $\mathbf{r}'(t)$ antes da integral.

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{r}(t)) &= \langle t^4 t^9, -t^3 \sqrt{t^2} \rangle \\
\mathbf{r}'(t) &= \langle 2t, 3t^2 \rangle
\end{aligned}$$

Tendo os dados em mãos, basta utilizar a definição de integrais de linha para campos vetoriais:

$$\begin{aligned}\int_C F \bullet dr &= \int_a^b F(r(t)) \bullet r'(t) dt \\ \int_C F \bullet dr &= \int_0^1 \langle t^4 t^9, -t^3 \sqrt{t^2} \rangle \bullet \langle 2t, 3t^2 \rangle dt \\ \int_C F \bullet dr &= \int_0^1 (2t^{14} + (-3)t^6) dt \\ \int_C F \bullet dr &= \left[\frac{2}{15} t^{15} - \frac{3}{7} t^7 \right]_0^1 \\ \int_C F \bullet dr &= -\frac{31}{105}\end{aligned}$$

Capítulo 2

Unidade II

2.1 Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Considerando ∇f , uma derivada de f . Então o que segue abaixo seria um Teorema Fundamental do Cálculo para as Integrais de Linha.

Theorem 4 Seja C uma curva lisa dada pela função vetorial $r(t)$, $t \in [a, b]$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C . Então:

$$\int_C \nabla f \bullet dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

Exemplo 14 Determine o trabalho realizado pelo campo vetorial F para mover uma partícula de $(0,1)$ a $(2,3)$:

$$\vec{F}(x, y) = 2y^{3/2} \vec{i} + 3x\sqrt{y} \vec{j}$$

→ Verificar se é um campo vetorial conservativo, por:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

→ Após verificado é sabido que, se F é um campos vetorial, então $F = \nabla f$.

→ Achar a função f .

→ Com isso, podemos aplicar o Teorema Fundamental das Integrais de Linha.

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial 3x\sqrt{y}}{\partial x} &= \frac{\partial 2y^{3/2}}{\partial y} \\ 3\sqrt{y} &= 3\sqrt{y}\end{aligned}$$

Logo, o campo é conservativo. Então, o próximo passo é achar f .

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$$

Da definição de gradiente, sabemos que as funções f_x e f_y são, respectivamente, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Com isso, é intuitivo que a função f seja obtida fazendo as integrais nessas variáveis.

$$\begin{aligned}f &= \int f_x dx \\ f &= \int f_y dy\end{aligned}$$

Como essas integrais são indefinidas elas gerarão constantes. É interessante lembrar que quando se integra em x , y é considerado constante e vice-versa. Para o início da definição de f pode-se escolher qualquer uma das duas funções, f_x ou f_y . Aqui iniciaremos os cálculos com f_x , com isso aparecerá uma constante que poderá ser em função de y , aqui chamada de $c(y)$.

$$\begin{aligned}f &= \int f_x dx \\ f &= \int 2y^{3/2} dx \\ f &= 2xy^{3/2} + c(y)\end{aligned}$$

Uma vez feita a integral, falta-nos definir a constante de integração $c(y)$. Para isso derivaremos em y e compararemos o resultado obtido com o f_y fornecido no exemplo.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial(2xy^{3/2} + c(y))}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x\sqrt{y} + c'(y)\end{aligned}$$

Comparando o resultado vemos que $c'(y) = 0$. Agora integraremos em y para retornar para a função f .

$$\begin{aligned}
f &= \int f_y dy \\
f &= \int 3x\sqrt{y} dy \\
f &= 2xy^{3/2} + c(x)
\end{aligned}$$

Novamente, derivaremos em x e compararemos o resultado.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial(2xy^{3/2} + c(x))}{\partial x} \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2y^{3/2} + c'(x)
\end{aligned}$$

Assim vemos que $c'(x)$ também é zero. Portanto a constante de integração independe de x ou y . E ficamos com:

$$f = 2xy^{3/2} + k$$

Agora, basta aplicar o teorema fundamental do cálculo:

$$\begin{aligned}
\oint_C F dr &= \oint_C \nabla f dr \\
\oint_C \nabla f dr &= f(2, 3) - f(0, 1) \\
&= 2 * 2 * 3^{3/2} + k - (2 * 0 * 1^{3/2} + k) \\
\oint_C \nabla f dr &= 4\sqrt{27}
\end{aligned}$$

2.2 Teorema de Green

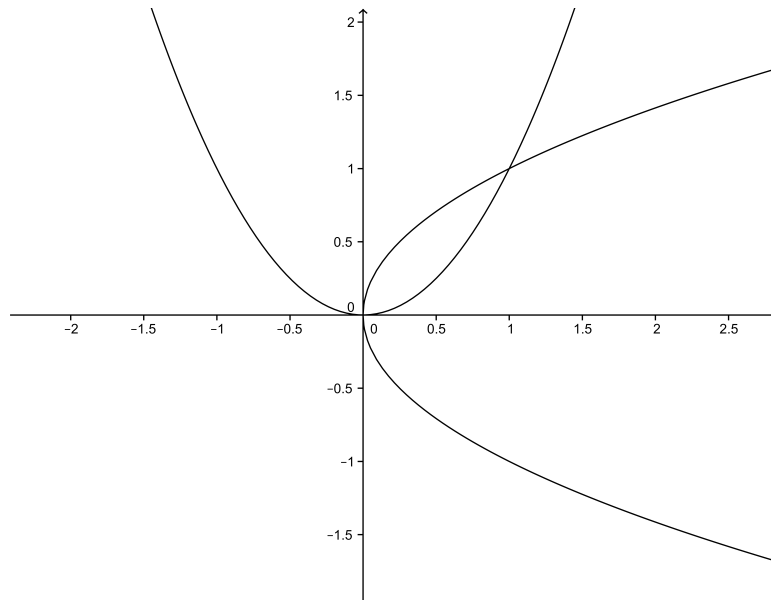
O Teorema de Green fornece uma relação entre as integrais de linha e as integrais Duplas. Será visto mais adiante que ele é uma forma mais simples, um caso especial melhor dizendo, do Teorema de Stokes.

Theorem 5 Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por trechos, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então:

$$\oint_C F \bullet dr = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Exemplo 15 Calcule a integral de linha $\oint F dr$ onde C é a curva fronteira, orientada positivamente, da região delimitada pelas parábolas $y_1 = \pm\sqrt{x}$ e

$y_2 = x^2$. Sabe-se também que:
 $F = \langle y + e^{\sqrt{x}}, 2x + \cos(y^2) \rangle$



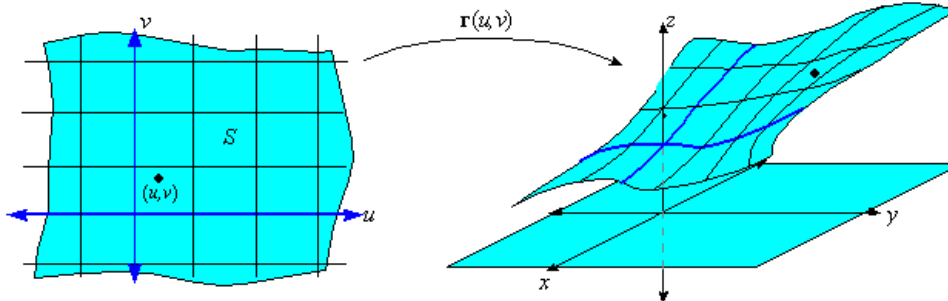
→ A área de interesse é a região entre duas parábolas.

→ Para determinar o ponto de intersecção basta igualar y_1 a y_2 .

→ É de bastante ajuda o gráfico dessas funções para a análise dos limites de integração.

$$\begin{aligned} \oint F dr &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ \oint F dr &= \iint_D \left(\frac{\partial(2x + \cos(y^2))}{\partial x} - \frac{\partial(y + e^{\sqrt{x}})}{\partial y} \right) dA \\ \oint F dr &= \int_0^1 \int_0^{y^2} (2 - 1) dx dy \\ \oint F dr &= \int_0^1 y^2 dy \\ \oint F dr &= \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 \\ \oint F dr &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.3 Superfícies Paramétricas e Suas Áreas



Tal como foi feito com as curvas espaciais, usando um parâmetro t para suas parametrizações. A parametrização também pode ser aplicada em superfícies. Com isso, através de dois parâmetros u e v , por exemplo, pode-se ter uma descrição de uma superfície no \mathbb{R}^3 .

Quanto à área de superfícies, será visto que para tal cálculo serão usadas a parametrização de superfícies, bem como uma aproximação da área da superfície pela área de um plano, infinitesimal, tangente a ela.

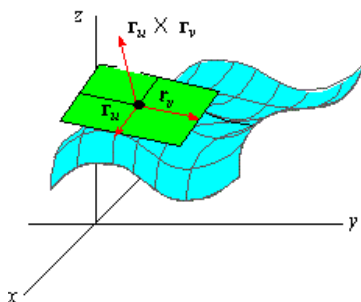


Figura 2.1 – Superfície Paramétrica e seu Plano Tangente.
Fonte:math.etsu.edu. Acessado em: 19/08/2014

Seja D o domínio dos parâmetros u e v , e S a superfície que tem x , y e z como coordenadas. Através da parametrização obtém-se $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$. Com isso, conforme são variados os parâmetros u e v é obtida a varredura da superfície S .

Theorem 6 Se uma superfície paramétrica lisa S é dada pela equação

$$r(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k \\ (u, v) \in D$$

e S é coberto por uma única vez quando (u,v) varre todo o domínio D dos parâmetros, então a área de superfície de S é

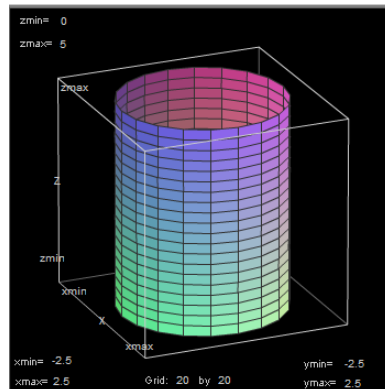
$$A(S) = \iint_D |r_u \times r_v| dA$$

Exemplo 16 Calcule a área de um cilindro, incluindo o fundo e o topo, de raio 2 e altura 5.

→ Para a área lateral será utilizada coordenada cilíndrica com $z \in [0, 5]$, que é a altura.

→ Para as extremidades, devido a simetria, basta calcular a área para uma extremidade e multiplicá-la por 2.

→ Por questão de organização, serão feitos alguns cálculos introdutórios necessários para o cálculo da área superficial.



Para a lateral temos:

$$r(u,v) = \begin{cases} x = 2\cos(\theta) \\ y = 2\sin(\theta); \theta \in [0, 2\pi] \\ z = z; z \in [0, 5] \end{cases}$$

Uma vez definida a parametrização, os vetores tangentes podem ser obtidos:

$$\begin{aligned} r_\theta &= \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ r_\theta &= \langle -2\sin(\theta), 2\cos(\theta), 0 \rangle \\ r_z &= \frac{\partial r}{\partial z} \\ r_z &= \langle 0, 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

Com os vetores tangentes pode ser obtido a equação dos planos que tangenciam essa superfície. Lembrando que o vetor normal resultante deverá apontar para fora da superfície (Regra da mão direita).

$$r_\theta \times r_z = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\text{sen}(\theta) & 2\text{cos}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_\theta \times r_z = \langle 2\text{cos}(\theta), 2\text{sen}(\theta), 0 \rangle$$

Para as extremidades temos:

$$r(r, \theta) = \begin{cases} x = r\text{cos}(\theta) \\ y = r\text{sen}(\theta) \\ z = 0 \text{ ou } 5 \end{cases}$$

O cálculo do vetor normal para as extremidades é análogo, porém ele pode ser facilmente deduzido. Como estamos:

considerando um cilindro em z ;

limitado entre os planos $z = 0$ e $z = 5$; e

o vetor normal sempre deverá apontar para fora da superfície, por definição.

Logo o vetor normal na parte inferior será $-\vec{k}$ e na parte superior será $+\vec{k}$. Que são os versores que apontam na direção negativa e positiva de z , respectivamente.

Tendo posse das parametrizações e dos vetores normais, podemos iniciar os cálculos.

$$\begin{aligned} A(S) &= \int \int_D |r_u \times r_v| dA \\ A(S) &= \int \int_D |\vec{k}| dA + \int \int_D |-\vec{k}| dA + \int \int_D |\langle 2\text{cos}(\theta), 2\text{sen}(\theta), 0 \rangle| dA \\ A(S) &= 2 \int \int_D |\vec{k}| dA + \int \int_D |\langle 2\text{cos}(\theta), 2\text{sen}(\theta), 0 \rangle| dA \\ A(S) &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 dr d\theta + \int_0^5 \int_0^{2\pi} \sqrt{2^2(\text{cos}^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta))} d\theta dz \\ A(S) &= 2r \Big|_0^2 \theta \Big|_0^{2\pi} + 2 \theta \Big|_0^{2\pi} z \Big|_0^5 \\ A(S) &= 8\pi + 20\pi \\ A(S) &= 28\pi u.a. \end{aligned}$$

2.4 Gradiente, Divergente e Rotacional

As três Operações apresentadas neste capítulo serão bastante usadas no decorrer desta disciplina como também em outras, como Mecânica dos Fluidos e Eletromagnetismo, portanto é de grande valia o entendimento das mesmas.

Tenha em mente, o que representam, como podem ser calculadas e quais as restrições de cada uma dessas operações.

2.4.1 O Operador Nabla

O nabla é usado em matemática para denominar o operador diferencial ∇ no cálculo vetorial.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

2.4.2 Gradiente de Funções (Escalares)

Podendo ser calculado *somente* em **funções escalares**, o gradiente de uma função escalar **resulta em uma função vetorial** que dá a direção de máxima variação da função escalar calculada. Por isso, visualmente, o campo gradiente de uma função escalar apontará para a região de maior variação da função.

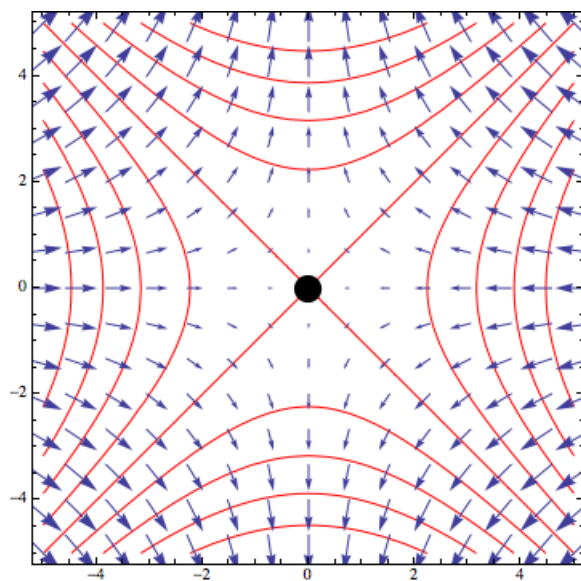


Figura 2.2 – Campo gradiente em um gráfico de curvas de nível (Equipotenciais).

Seja $f(x, y, z)$ uma função escalar, seu gradiente será dado por:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

2.4.3 Divergente

Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e existem $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ e $\frac{\partial R}{\partial z}$, então a divergência de \mathbf{F} é uma função de três variáveis, definida por:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

2.4.4 Rotacional

Se $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e as derivadas parciais em P , Q e R existem, então o rotacional de \mathbf{F} é um campo vetorial no \mathbb{R}^3 , definido por:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Chega-se no mesmo resultado, fazendo:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix}$$

Capítulo 3

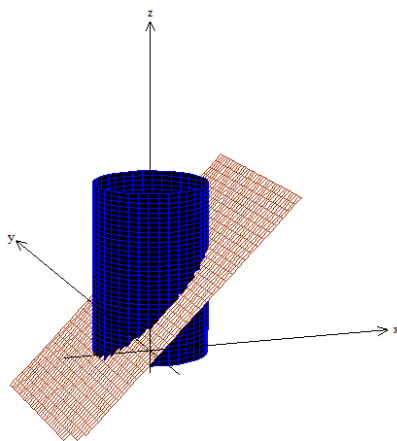
Unidade III

3.1 Integrais de Superfície

De modo semelhante como foi feito com a integral de linha através do comprimento de arco, podemos fazer para as integrais de superfície. Imagine uma superfície lisa, ou lisa por partes, S que está contida no domínio de uma função f , definida e contínua em S . Sendo D o domínio dos parâmetros u e v , a integral de f sobre S é definida por:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |r_u \bullet r_v| dA$$

Exemplo 17 Seja S a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre os planos $z = 0$ e $z = x + 1$.



a) Parametrize e esboce S .

b) Calcule $\iint_S z dS$

→A parametrização é de um cilindro que varia entre valores de z , que neste caso é zero e uma função dependente de x .

→Feita a parametrização, o vetor normal deve ser calculado.

→Com os dois passos anteriores feitos, basta aplicar o conceito de integral de superfície.

Usamos θ e z como parâmetros para parametrizar S .
Temos:

$$a) r(\theta, z) = \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \text{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Onde $\theta \in [0, 2\pi]$ e $z \in [0, 1 + \cos(\theta)]$.

b)O graduando deve ficar a vontade para a solução do vetor normal. Ela é feita de forma análoga ao exemplo já feito nesta apostila. Porém, esse vetor normal é facilmente obtido quando se observa que, em um cilindro, os vetores normais à superfície lateral serão sempre vetores com a direção e magnitude do raio .

Como no presente caso o raio é um, logo o módulo do vetor normal será também um, então: $|r_\theta \times r_z| = 1$.

Com isso:

$$\begin{aligned} \int \int_S z dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos(\theta)} z dz d\theta \\ \int \int_S z dS &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(\theta))^2 - 0^2 d\theta \\ \int \int_S z dS &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) d\theta \\ \int \int_S z dS &= \frac{1}{2} \left[\theta + 2\text{sen}(\theta) + \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\text{sen}(\theta)}{2} \right) \right]_0^{2\pi} \\ \int \int_S z dS &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

3.2 Integrais de Superfície de Campos Vetoriais

Theorem 7 Se \mathbf{F} for um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S com versor normal \mathbf{n} , então a **integral de superfície de \mathbf{F}** sobre S é:

$$\int \int_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \int \int_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dS$$

Essa integral também é chamada de fluxo de \mathbf{F} sobre S .

Exemplo 18 Seja o campo vetorial $\mathbf{F} = \langle x - y, y + x, z \rangle$. Calcule o fluxo de \mathbf{F} através de S se $S : x^2 + y^2 = a^2$ com $a > 0$ e $z \in [0, h]$.

→ Superfície: cilindro de raio 'a' e altura 'h'.

→ Antes do cálculo da integral serão feitas a parametrização desse cilindro, com as devidas variações nos parâmetros; o cálculo do vetor normal aos planos tangentes; e a multiplicação escalar de $\vec{F} \bullet \vec{n}$.

$$\text{Parametrização } r(\theta, z) = \begin{cases} x = a \cos(\theta) \\ y = a \sin(\theta), \theta \in [0, 2\pi] \\ z = z, z \in [0, h] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} &= r_\theta \times r_z \\ \text{Vetor normal } \vec{n} &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin(\theta) & a \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \vec{n} &= \langle a \cos(\theta), a \sin(\theta), 0 \rangle \end{aligned}$$

Escalar: $\vec{F} \bullet \vec{n}$

$$\begin{aligned} \vec{F} \bullet \vec{n} &= \langle a \cos(\theta) - a \sin(\theta), a \sin(\theta) + a \cos(\theta), z \rangle \bullet \langle a \cos(\theta), a \sin(\theta), 0 \rangle \\ \vec{F} \bullet \vec{n} &= a^2 + a(\cos(\theta) - \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Integral de Superfície: $\int \int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} = \int \int_{S_1} \vec{F} \bullet \vec{dS} + \int \int_{S_2} \vec{F} \bullet \vec{dS} + \int \int_{S_3} \vec{F} \bullet \vec{dS}$

→ Dividida em 3 partes: lateral, topo e embaixo. Sendo que no topo e embaixo, os vetores normais são \vec{k} e $-\vec{k}$, respectivamente.

$$\begin{aligned}
\int \int_{S_1} \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int_0^{2\pi} \int_0^h a^2 + a(\cos(\theta) - \text{sen}(\theta)) dz d\theta \\
\int \int_{S_1} \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int_0^{2\pi} za^2 + za(\cos(\theta) - \text{sen}(\theta)) \Big|_0^h d\theta \\
\text{Lateral} \int \int_{S_1} \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int_0^{2\pi} ha^2 + ha(\cos(\theta) - \text{sen}(\theta)) d\theta \\
\int \int_{S_1} \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \theta ha^2 + ha^2(\text{sen}(\theta) + \cos(\theta)) \Big|_0^{2\pi} \\
\int \int_{S_1} \vec{F} \bullet \vec{dS} &= 2\pi a^2 h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \int_{S_2} \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int \int_D \langle x - y, x + y, z \rangle \bullet \vec{k} dA \text{ no topo temos } z=h \\
\text{Topo} \int \int_{S_2} \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int_0^{2\pi} \int_0^a h r dr d\theta \\
\int \int_{S_2} \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \pi a^2 h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \int_{S_3} \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int \int_D \langle x - y, x + y, z \rangle \bullet \vec{k} dA \text{ no topo temos } z=0 \\
\text{Embaixo} \int \int_{S_3} \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int_0^{2\pi} \int_0^a 0 r dr d\theta \\
\int \int_{S_3} \vec{F} \bullet \vec{dS} &= 0
\end{aligned}$$

$$\int \int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} = 3\pi a^2 h$$

Exemplo 19 Calcule o fluxo de $\vec{F} = \langle x, y, 0 \rangle$ para uma esfera de raio 'a'.

$ \begin{aligned} x &= \rho * \text{sen}(\theta) \cos(\phi) \\ y &= \rho * \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \\ z &= \rho * \cos(\theta) \end{aligned} $
--

$$\begin{aligned}
\vec{n} &= r_\theta \times r_\phi \\
\text{Vetor normal } \vec{n} &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cos(\theta) \cos(\phi) & a \cos(\theta) \text{sen}(\phi) & -a \text{sen}(\theta) \\ -a \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) & a \text{sen}(\theta) \cos(\phi) & 0 \end{bmatrix} \\
\vec{n} &= a^2 \langle \text{sen}^2(\theta) \cos(\phi), \text{sen}^2(\theta) \text{sen}(\phi), \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \rangle
\end{aligned}$$

Escalar: $\vec{F} \bullet \vec{n}$

$$\begin{aligned}\vec{F} \bullet \vec{n} &= a \langle \cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta), \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi), 0 \rangle \bullet a^2 \langle \operatorname{sen}^2(\theta) \cos(\phi), \operatorname{sen}^2(\theta) \operatorname{sen}(\phi), \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \rangle \\ \vec{F} \bullet \vec{n} &= a^3 \cos^2(\phi) \operatorname{sen}^3(\theta) + a^3 \operatorname{sen}^3(\theta) \operatorname{sen}^2(\phi) \\ \vec{F} \bullet \vec{n} &= a^3 \operatorname{sen}^3(\theta)\end{aligned}$$

Integral por substituição trigonométrica

$$\begin{aligned}\int_a^b \operatorname{sen}^3(t) dt &= \int_a^b \operatorname{sen}^2(t) \operatorname{sen}(t) dt \\ \int_a^b \operatorname{sen}^3(t) dt &= \int_a^b (1 - \cos^2(t)) \operatorname{sen}(t) dt \\ \int_a^b \operatorname{sen}^3(t) dt &= \int_a^b \operatorname{sen}(t) - \cos^2(t) \operatorname{sen}(t) dt \\ \int_a^b \operatorname{sen}^3(t) dt &= -\cos(t)|_a^b + \frac{1}{3} \cos^3(t)|_a^b\end{aligned}$$

Integral de Superfície: $\int \int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} = \int \int_D \vec{F} \bullet \vec{n} dA$

$$\begin{aligned}\int \int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int \int_D \vec{F} \bullet \vec{n} dA \\ \int \int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^3 \operatorname{sen}^3(\theta) d\theta d\phi \\ \int \int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= a^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \operatorname{sen}^3(\theta) d\theta \\ \int \int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= a^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \operatorname{sen}^3(\theta) d\theta \\ \int \int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= a^3 \left[-\cos(\theta) + \frac{1}{3} \cos^3(\theta) \right]_0^\pi [\phi]_0^{2\pi} \\ \int \int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= a^3 * \frac{4}{3} * 2\pi \\ \int \int_S \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \frac{8}{3} \pi a^3\end{aligned}$$

3.3 O Teorema de Stokes

Sendo uma versão "3D" do Teorema de Green, o Teorema de Stokes relaciona a integral de linha da curva fronteira de S com a integral de superfície do rotacional de F .

Theorem 8 Seja S uma superfície orientada, lisa por trechos, cuja fronteira é formada por uma curva C simples, fechada, lisa por trechos, com orientação positiva. Seja F um campo vetorial cujos componentes têm derivadas parciais contínuas na região aberta de \mathbb{R}^3 que contém S . Então

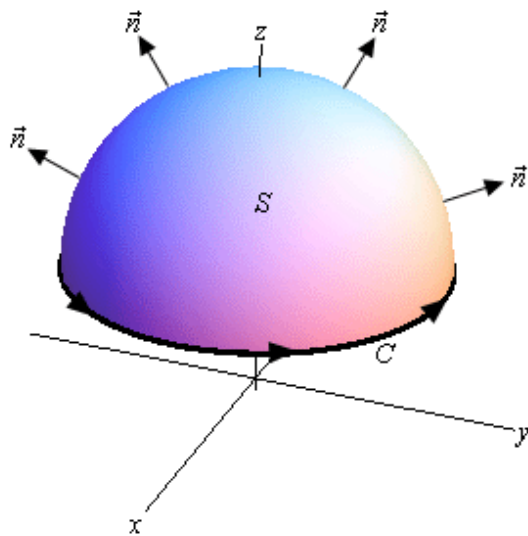
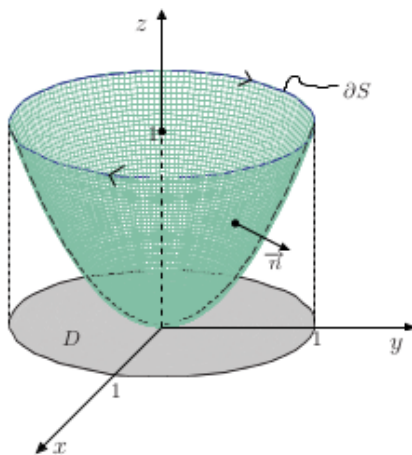


Figura 3.1 – Ilustração do Teorema de Stokes.
 Fonte: <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/StokesTheorem.aspx>.
 Acessado em: ago/2014.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \int_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Exemplo 20 Verifique o Teorema de Stokes onde $F = \langle y, -x, 0 \rangle$ e a superfície é o parabolóide $x^2 + y^2 - z = 0$ interceptado pelo plano $z = 1$.



→ O teorema é comprovado fazendo: $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \int_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.
 → Portanto terão que ser calculadas a integral de linha da função e também a integral de superfície do rotacional da mesma.

Integral de linha

→ Para obter o resultado correto, é preciso calcular a integral de linha considerando a orientação positiva da superfície.

→ Devido ao fato da orientação da superfície aparece o sinal negativo na integral. Em caso de não entendimento, vide 'Stewart'.

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \bullet \vec{dS} &= - \int_0^{2\pi} \vec{F} \bullet \vec{r}'(t) dt \\ \oint_C \vec{F} \bullet \vec{dS} &= - \int_0^{2\pi} \langle \text{sen}(t), -\text{cos}(t), 0 \rangle \bullet \langle -\text{sen}(t), \text{cos}(t), 0 \rangle dt \\ \oint_C \vec{F} \bullet \vec{dS} &= \int_0^{2\pi} (\text{sen}^2 t + \text{cos}^2 t) dt \\ \oint_C \vec{F} \bullet \vec{dS} &= 2\pi\end{aligned}$$

Integral de superfície

$$\begin{aligned}\text{Rotacional } \text{rot} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \\ \text{rot} \mathbf{F} &= \langle 0, 0, -2 \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{n} &= r_x \times r_y \\ \text{Vetor normal } \vec{n} &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{bmatrix} \\ \vec{n} &= \langle -2x, -2y, 1 \rangle\end{aligned}$$

$$\text{Produto Escalar } \text{rot} \vec{F} \bullet \vec{n} = -2$$

→ Atento para o fato de o domínio de parâmetros a seguir ser um círculo de raio unitário, portanto sua área será: $A(D) = \pi \text{ u.a.}$

$$\begin{aligned}
 \int \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{dS} &= \int \int_D \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA \\
 \int \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{dS} &= \int \int_D -2 \, dA \\
 \text{Integral } \int \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{dS} &= -2A(D) \\
 A(D) &= \pi \\
 \int \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{dS} &= -2\pi
 \end{aligned}$$

3.4 Teorema da Divergência

O Teorema de Gauss, também conhecido como Teorema da Divergência, relaciona a integral de fluxo de \mathbf{F} através de uma superfície S com a integral volumétrica do divergente de \mathbf{F} por S .

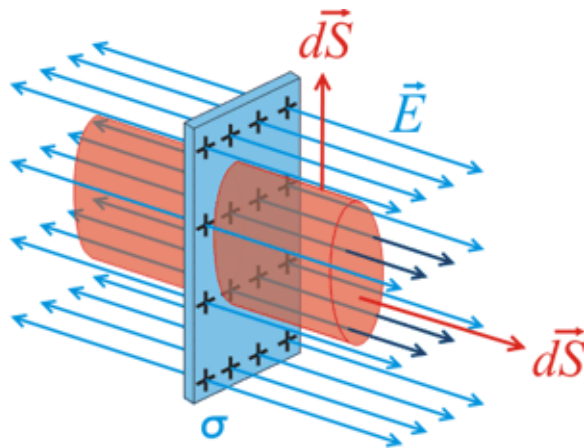


Figura 3.2 – Fluxo de um campo elétrico por uma superfície. Fonte: <http://acer.forestales.upm.es/basicas/udfisica/asignaturas/fisica/electro/gauss.html>. Acessado em: ago/2014.

Theorem 9 Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E , orientada positivamente (para fora). Seja \mathbf{F} um campo vetorial cujas funções componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E . Então

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \int \int_E \text{div } \mathbf{F} \, dV$$

Exemplo 21 Verifique o Teorema de Gauss utilizando o exemplo 18.

$$\begin{aligned}
\int \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{dS} &= \int \int \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV \\
\int \int \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV &= \int \int \int_V (1 + 1 + 1) dV = 3V_{\text{cilindro}} \\
\int \int \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV &= 3\pi a^2 h
\end{aligned}$$

Exemplo 22 Verifique o Teorema de Gauss utilizando o exemplo 19.

$$\begin{aligned}
\int \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{dS} &= \int \int \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV \\
\int \int \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV &= \int \int \int_V (1 + 1 + 0) dV = 2V_{\text{esfera}} \\
\int \int \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV &= 2\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \\
\int \int \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV &= \frac{8}{3}\pi a^3
\end{aligned}$$