



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - CAMPUS JOINVILLE  
CENTRO DE ENGENHARIAS DA MOBILIDADE

## **MECÂNICA DOS FLUIDOS**

**Fernanda Hille**

JULHO / 2014

## INTRODUÇÃO

Esta apostila foi desenvolvida como um projeto de ensino do Programa de Educação Tutorial do Centro de Engenharias da Mobilidade (PET-CEM). O presente trabalho apresenta um resumo da matéria, contendo os principais conceitos fundamentais e exemplos de vários assuntos da mecânica dos fluidos. Somente a leitura deste material não é suficiente para entendimento total da matéria. É necessária a leitura de algum livro do assunto para analisar as demonstrações de fórmulas e resolver outros exemplos.

## SUMÁRIO

|   |    |
|---|----|
| 1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS .....                                   | 1  |
| 2. ESTÁTICA DOS FLUIDOS .....                                     | 2  |
| 2.1. Manômetros de Coluna .....                                   | 2  |
| 2.2. Forças Hidrostáticas Sobre Superfícies Submersas .....       | 5  |
| 3. EQUAÇÕES BÁSICAS NA FORMA INTEGRAL PARA UM VC .....            | 9  |
| 3.1. Conservação da Massa (Equação da Continuidade) .....         | 9  |
| 3.2. Equação da Quantidade de Movimento para um VC inercial ..... | 10 |
| 4. ANÁLISE DIFERENCIAL DOS MOVIMENTOS DOS FLUIDOS.....            | 13 |
| 4.1. Conservação da Massa em Análise Diferencial .....            | 13 |
| 4.2. Equação de Navier-Stokes .....                               | 15 |
| 4.3. Equação de Euler.....  | 16 |
| 4.3.1. Equação de Euler em Coordenadas de Linha de corrente ..... | 16 |
| 4.4. Função de Corrente .....                                     | 17 |
| 4.5. Potencial de Velocidade .....                                | 17 |
| 4.6. Equação de Bernoulli .....                                   | 18 |
| 4.7. escoamento em Planos Elementares .....                       | 21 |
| 4.8. Superposição de escoamentos em Planos Elementares.....       | 22 |
| 5. ANÁLISE DIMENSIONAL E SEMELHANÇA .....                         | 28 |
| 5.1. Determinação dos Grupos $\pi$ .....                          | 28 |
| 5.2. Grupos Adimensionais Importantes .....                       | 31 |
| 5.3. Semelhança em escoamentos e Estudos de Modelos .....         | 32 |
| 6. ESCOAMENTO VISCOSO INTERNO E INCOMPRESSÍVEL .....              | 36 |
| 6.1. escoamento Entre Placas Paralelas Infinitas .....            | 36 |

---

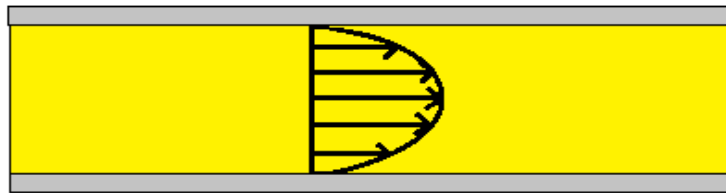
|   |    |
|---|----|
| 6.1.1. Ambas Estacionárias .....                                  | 36 |
| 6.1.2. Em um Pistão .....   | 38 |
| 6.1.3. Em Dutos.....  | 39 |
| 6.2. Equação da Energia em Escoamentos em Tubos .....             | 42 |
| 6.3. Perda de Carga .....   | 42 |
| 7. ESCOAMENTO VISCOZO, INCOMPRESSÍVEL E EXTERNO.....              | 45 |
| 7.1. Espessuras de Camada Limite .....                            | 45 |
| 7.2. escoamento Sobre Uma Placa Plana Horizontal (Blausius) ..... | 47 |
| 7.3. Força de Arrasto .....                                       | 47 |
| 8. SUGESTÃO DE ESTUDO.....  | 51 |
| REFERÊNCIAS.....  | 52 |

## 1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

**Fluido:** É uma substância que se deforma continuamente sob ação de uma tensão de cisalhamento. Podem estar em forma de gases ou líquidos.

**Viscosidade ( $\mu$ ):** Caracteriza a resistência de um fluido ao escoamento, ou seja, quanto maior a viscosidade de um fluido mais dificuldade ele tem de se movimentar.

**Escoamento Laminar:** As secções do fluido se deslocam em planos paralelos ou em círculos concêntricos coaxiais (quando em um tubo cilíndrico), sem se misturar.



**Escoamento Turbulento:** As partículas se misturam de uma forma não linear, ou seja, caótica com turbulência e redemoinhos.

**Zona de Transição:** Os escoamentos mudam de laminar para turbulentos quando atingem o Reynolds de transição. O Reynolds de transição é de 2.300 para escoamentos internos e aproximadamente 500.000 para escoamentos externos.

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

Onde,  $\rho$  e  $\mu$  são referentes ao fluido,  $L$  refere-se ao objeto e  $V$  é velocidade do objeto em relação ao fluido.

**Escoamento Compressível:** A densidade varia com a pressão. Geralmente são gases.

**Escoamento Incompressível:** A densidade não varia com a pressão. Geralmente são líquidos. Para um gás ser incompressível  $M = \frac{V}{c}$  se  $M < 0,3$  o gás pode ser tratado como incompressível.

**Escoamento Interno:** São os escoamentos que passam por dentro de dutos, tubos, placas, etc.

**Escoamento externo:** O fluido pode estar livre ou sobre uma única placa.

## 2. ESTÁTICA DOS FLUIDOS

### 2.1. Manômetros de Coluna

Para descobrir a pressão em algum ponto do manômetro é utiliza-se a equação da pressão:

$$p_2 = p_1 \pm \rho \cdot g \cdot h$$

Quando o ponto 2 está a uma altura menor do ponto 1, há uma quantidade de fluido maior sobre o ponto 1, portando:

$$p_2 = p_1 + \rho \cdot g \cdot h$$

Quando o ponto 2 está mais alto que o ponto 1 a pressão nele é menor do que do ponto 1, assim:

$$p_2 = p_1 - \rho \cdot g \cdot h$$

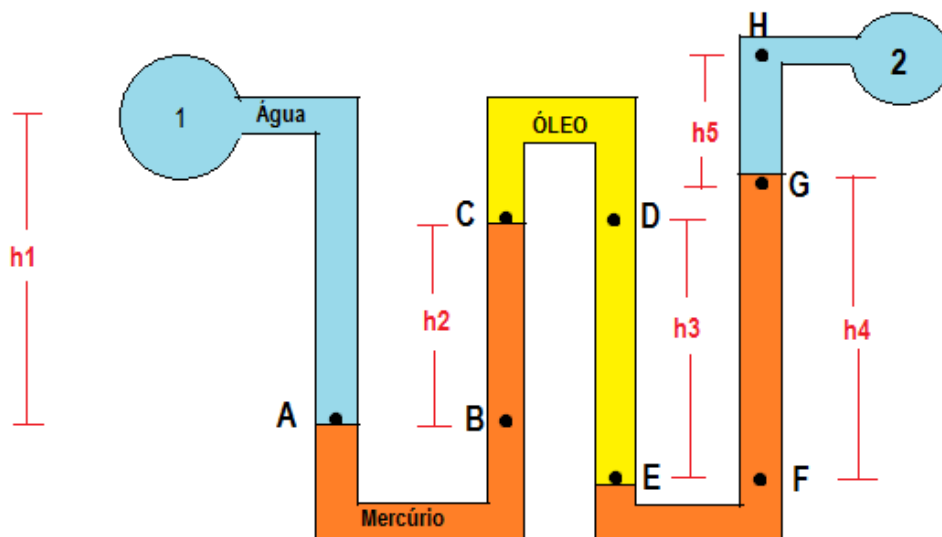
Se os dois pontos estiverem na mesma altura:

$$p_2 = p_1$$

Para facilitar os cálculos em manômetros de coluna complexos e com diferentes tipos de fluidos, são adicionados pontos em cada transição dos fluidos. Veja o exemplo a seguir:

#### Exemplo 1

Qual é a pressão no ponto 2 em função da pressão no ponto 1, das alturas e das densidades dos fluidos?



Resolução:

Observe onde os pontos A, B, C, D, E, F, G e H foram colocados. Para achar a pressão no ponto 2 é necessário analisar cada ponto. Percorrendo o manômetro a partir do ponto 1 até o ponto 2 e passando por todos os pontos no caminho, são obtidas as seguintes equações:

$$p_A = p_1 + \rho(\text{água}).g.h_1$$

$$p_B = p_A \quad (\text{estão na mesma altura})$$

$$p_C = p_B - \rho(\text{mercúrio}).g.h_2$$

$$p_D = p_C$$

$$p_E = p_D + \rho(\text{óleo}).g.h_3$$

$$p_F = p_E$$

$$p_G = p_F - \rho(\text{mercúrio}).g.h_4$$

$$p_H = p_G - \rho(\text{água}).g.h_5$$

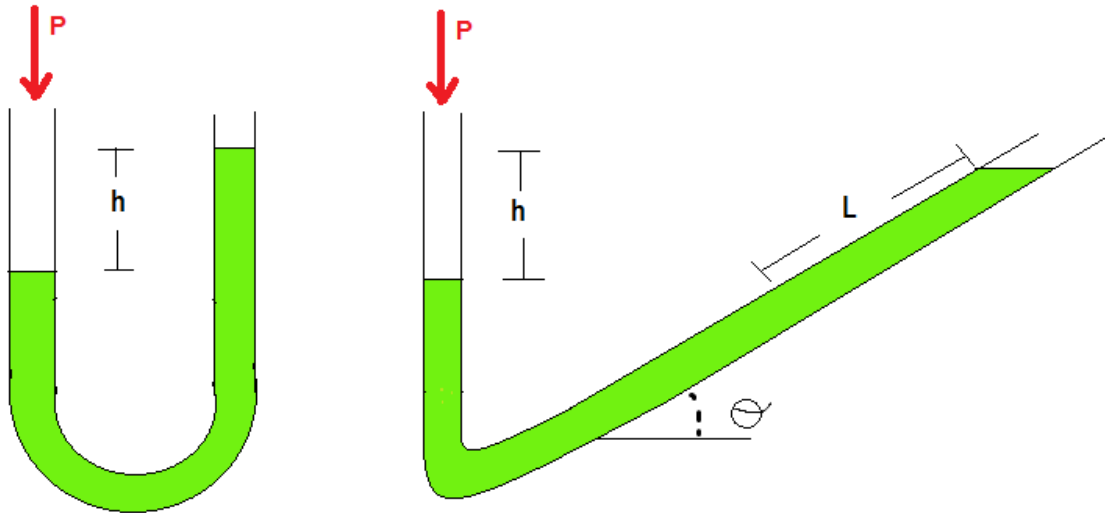
$$p_2 = p_H$$

Resolvendo as equações:

$$p_2 = p_1 + \rho(\text{água}).g.h_1 - \rho(\text{mercúrio}).g.h_2 + \rho(\text{óleo}).g.h_3 - \rho(\text{mercúrio}).g.h_4 - \rho(\text{água}).g.h_5$$

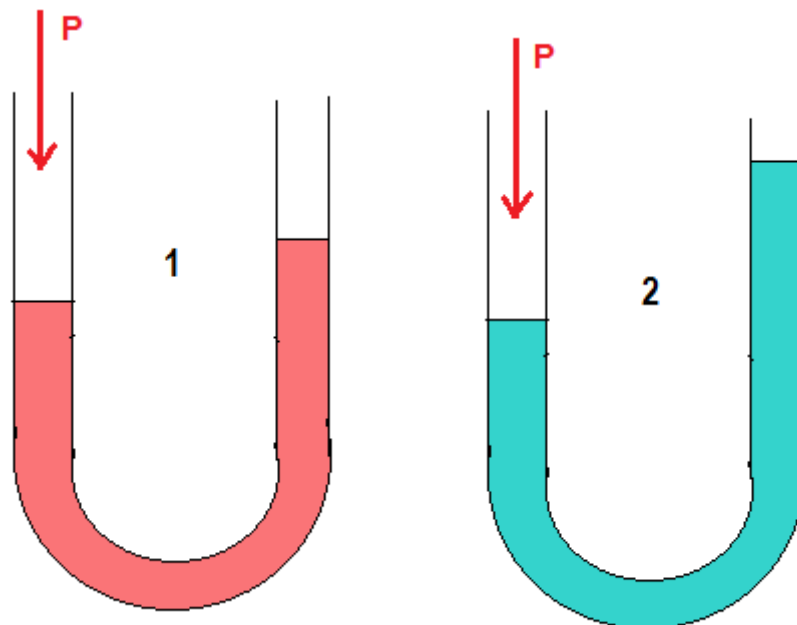
*Obs: Observe que a  $p_2$  tem que ser menor que  $p_1$ , já que  $p_2$  está em um ponto mais alto.*

### Manômetros Inclinados



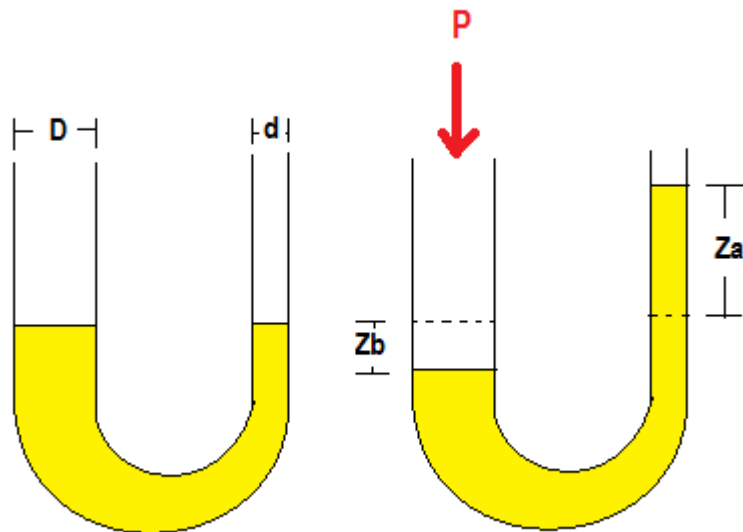
$$\text{sen}\theta = \frac{h}{L}$$

### Manômetros com Fluidos Diferentes



$$\rho_1 > \rho_2$$

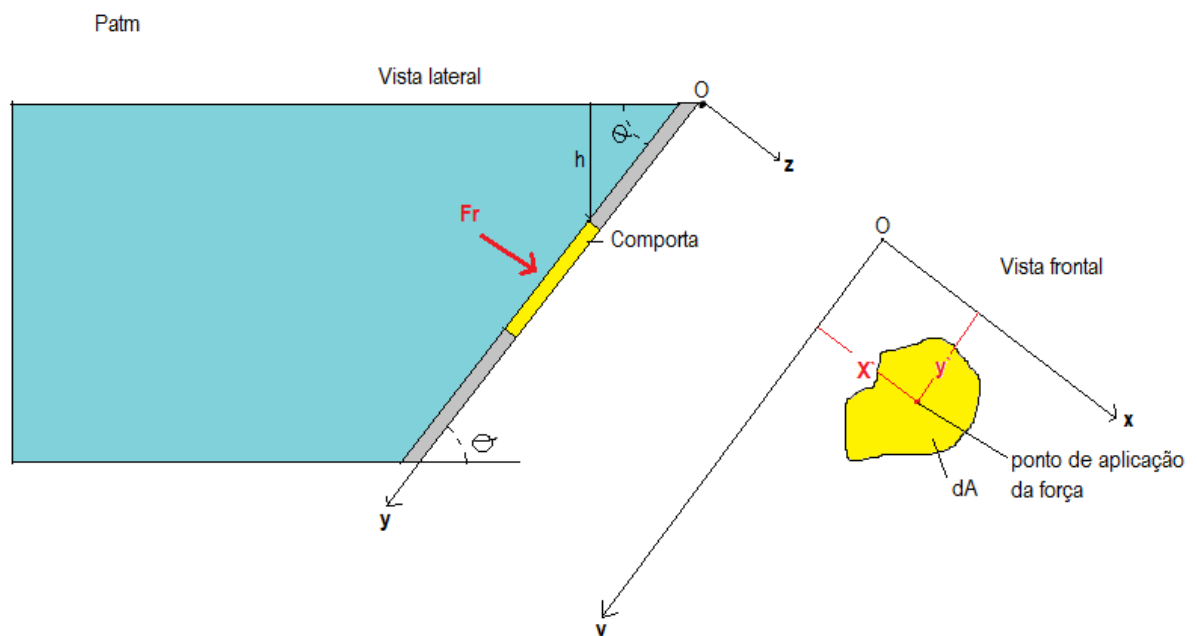
## Manômetros com Diâmetros Diferentes



Quando aplicada uma força em um lado do manômetro, as alturas deslocadas serão diferentes devido aos diâmetros diferentes, porém o volume deslocado é o mesmo. Assim:

$$D^2 \cdot Z_b = d^2 \cdot Z_a$$

## 2.2. Forças Hidrostáticas Sobre Superfícies Submersas



Magnitude da força:

$$|Fr| = - \int p \, dA$$

Para:

- \_ Fluidos estáticos
- \_ Incompressíveis
- \_ Onde a gravidade é a única força atuando

$$p = p_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$$

$$\text{Mas } h = y \cdot \text{sen}(\theta)$$

Então:

$$|Fr| = - \int \rho \cdot g \cdot y \cdot \text{sen}(\theta) \, dA$$

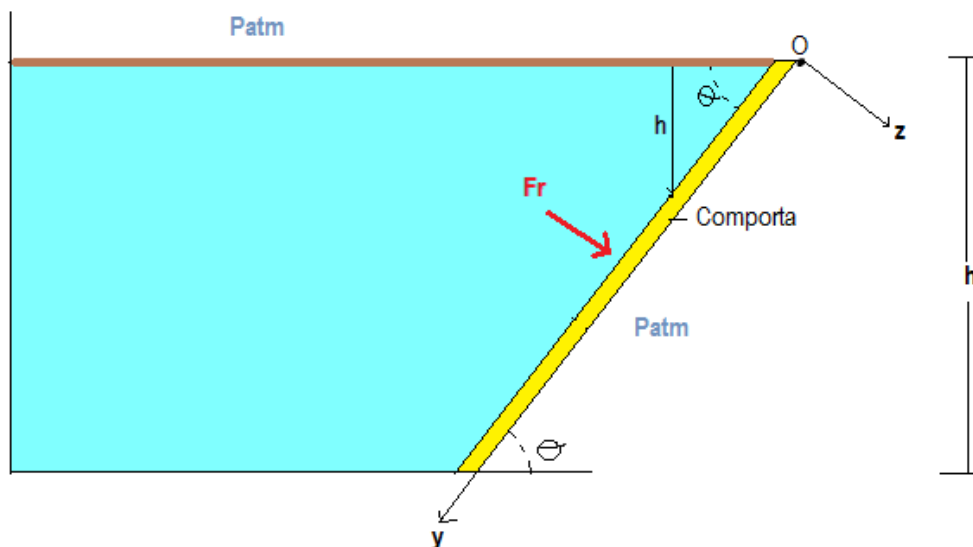
Ponto de ação da força:

$$y^{\cdot} \cdot Fr = \int y \cdot p \, dA$$

$$x^{\cdot} \cdot Fr = \int x \cdot p \, dA$$

### Exemplo 2:

A profundidade (h) da represa é 10m. O ângulo ( $\theta$ ) da comporta com o chão é de  $45^\circ$ . O comprimento da comporta (L) é 14,142m. A largura da represa (w) é de 8m. Qual é a força (Fr) na comporta?



Primeiramente é necessário definir as hipóteses do problema:

- \_ Fluido estático
- \_ Incompressível
- \_ Nenhuma força externa atuando
- \_ Pressão atmosférica atuando em ambos os lados da comporta

1. Magnitude da força:

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

$$h = y \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$p = \rho \cdot g \cdot y \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$Fr = - \int_A p \, dA$$

$$Fr = - \int_0^L \int_0^w \rho \cdot g \cdot y \cdot \text{sen}(\theta) \, dx \, dy$$

$$Fr = - \int_0^L w \rho \cdot g \cdot y \cdot \text{sen}(\theta) \, dy$$

$$Fr = \left. \frac{-w \cdot \rho \cdot g \cdot y^2 \cdot \text{sen}(\theta)}{2} \right]_0^L$$

$$Fr = \frac{-w \cdot \rho \cdot g \cdot L^2 \cdot \text{sen}(\theta)}{2}$$

$$Fr = \frac{-8 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 14,142^2 \cdot \text{sen}(45^\circ)}{2}$$

$Fr = 5.549 \text{ kN}$

2. Ponto de ação da força:

$$y' \cdot Fr = \int_A y \, p \, dA$$

$$y' \cdot Fr = \int_0^L \int_0^w y \cdot \rho \cdot g \cdot y \cdot \text{sen}(\theta) \cdot dx \cdot dy$$

$$y' \cdot Fr = \int_0^L y^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \text{sen}(\theta) \cdot w \cdot dy$$

$$y' \cdot Fr = \frac{L^3 \cdot \rho \cdot g \cdot \text{sen}(\theta) \cdot w}{3}$$

$$y' = \frac{14,142^3 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot \text{sen}(45^\circ) \cdot 8}{3 \cdot 5549 \cdot 10^3}$$

$$y' = 9,43\text{m}$$

$$x' \cdot Fr = \int_A x p dA$$

$$x' \cdot Fr = \int_0^L \int_0^w x \cdot \rho \cdot g \cdot y \cdot \text{sen}(\theta) \cdot dx \cdot dy$$

$$x' \cdot Fr = \frac{1}{2} \int_0^L w^2 \cdot \rho \cdot g \cdot y \cdot \text{sen}(\theta) \cdot dy$$

$$x' = \frac{w^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \text{sen}(\theta) \cdot L^2}{4 \cdot Fr}$$

$$x' = \frac{8^2 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot \text{sen}(45^\circ) \cdot 14,142^2}{4 \cdot 5549 \times 10^3}$$

$$x' = 4\text{m}$$

*Obs: O valor de x obviamente deve ser 4, pois o ponto de atuação da força em x deve ser a metade da largura total.*

### 3. EQUAÇÕES BÁSICAS NA FORMA INTEGRAL PARA UM VOLUME DE CONTROLE

#### 3.1. Conservação da Massa (Equação da Continuidade)

“A taxa de variação temporal da massa no interior do volume de controle é igual ao fluxo líquido de massa através da superfície de controle”.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0$$

Onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $t$  é o tempo,  $dV$  é o volume infinitesimal,  $\vec{V}$  é a velocidade absoluta do fluido,  $\vec{n}$  é o vetor unitário normal ao elemento de área  $dA$ .

O primeiro termo representa a taxa de variação da massa dentro do volume de controle e o segundo termo representa a taxa líquida de fluxo de massa para fora através da superfície de controle.

#### Casos especiais

##### Escoamento incompressível através de um Volume de Controle fixo

$$\int_{SC} \vec{V} d\vec{A} = 0$$

Em alguns casos é possível aproximar uma velocidade uniforme em cada entrada e saída. Nesse caso a equação pode ser simplificada para:

$$\sum_{sc} \vec{V} \vec{A} = 0$$

O vetor da área deve estar sempre apontado para fora da superfície de controle.

##### Vazão volumétrica

$$Q = \int_A \vec{V} dA$$

Módulo de velocidade média de uma secção:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A}$$

### Escoamento permanente compressível através de um volume de controle fixo

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Em alguns casos é possível aproximar uma velocidade uniforme em cada entrada e saída. Nesse caso a equação pode ser simplificada para:

$$\sum_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = 0$$

### 3.2. Equação da quantidade de movimento para um volume de controle Inercial

Segunda lei de Newton para um volume de controle não acelerado:

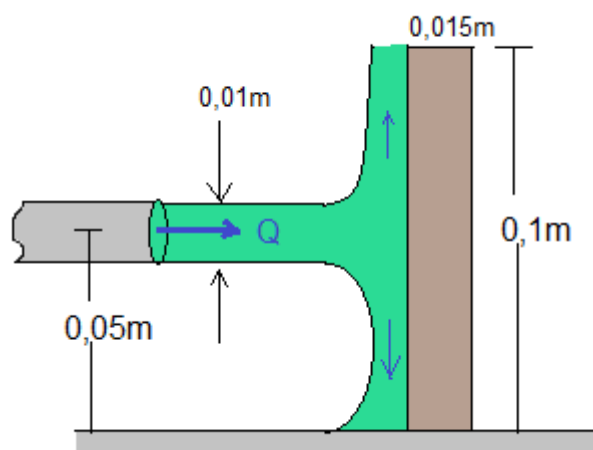
$$\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_S = \frac{\partial \int_{VC} \vec{V} \rho dV}{\partial t} + \int_{SC} \rho \vec{V} \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

F<sub>c</sub>: Forças de campo. Na mecânica dos fluidos geralmente é a gravidade, mas ainda podem ser campos elétricos ou magnéticos.

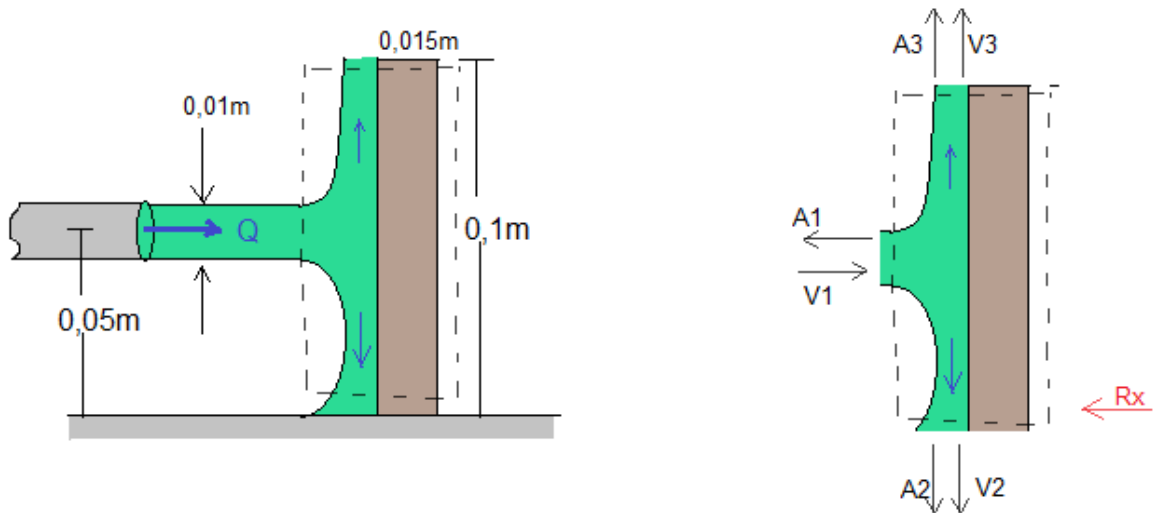
F<sub>s</sub>: Forças de superfície. Na mecânica dos fluidos a mais comum é a pressão.

#### Exemplo 3:

Um jato de água é defletido por um bloco retangular (15 mm x 200 mm x 100mm) que pesa 6N. Determine a vazão volumétrica mínima para derrubar o bloco.



Primeiramente é necessário traçar o volume de controle. No VC devem estar presentes todas as saídas e entradas de água.



Agora, vamos definir as hipóteses do problema:

- \_ Escoamento permanente.
- \_ Escoamento incompressível.
- \_ Escoamento uniforme em cada seção onde o fluido cruza as fronteiras do VC.

Com essas hipóteses podemos usar diretamente a equação da continuidade para escoamento incompressível através de um volume de controle fixo e com escoamento uniforme em cada seção:

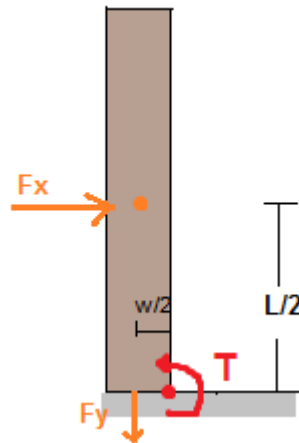
$$\sum_{sc} \vec{V} \vec{A} = 0$$

$$-V1.A1 + V2.A2 + V3.A3 = 0$$

$$V1.A1 = V2.A2 + V3.A3$$

$$\text{Porém, } A1 = A2 + A3 \text{ e } A2 = A3$$

$$V1 = V2 = V3$$



Observe que quando o bloco estiver caindo ele irá girar em torno do ponto do canto inferior direito. A força do jato de água precisa vencer a força de torque nesse ponto. A força  $F_y$  é o peso do bloco: 6N. Fazendo a somatória dos momentos em relação ao ponto do torque igual à zero:

$$\frac{F_y \cdot w}{2} - \frac{F_x \cdot L}{2} = 0$$

$$\frac{6 \cdot 0,015}{2} - \frac{F_x \cdot 0,1}{2} = 0$$

$$F_x = 0,9 \text{ N}$$

Então, sabe-se que a força que o jato precisa ter é de 0,9N. Agora é possível encontrar a velocidade que ele precisa atingir para exercer essa força, utilizando a equação da quantidade de movimento para um volume de controle inercial. As forças de campo nesse caso é zero. Então a equação pode ser simplificada para:

$$F_x = \int_{SC} \rho V dA$$

$$F_x = -\rho \cdot V^2 \cdot A_{\text{jato}}$$

$$F_x = -1000 \cdot v^2 \cdot (\pi \cdot r^2)$$

$$0,9 = -1000 \cdot v^2 \cdot (\pi \cdot 0,005^2)$$

$$v = 3,386 \text{ m/s}$$

Com a velocidade, a vazão pode ser facilmente calculada:

$$Q = v \cdot A$$

$$Q = 3,386 \cdot (\pi \cdot 0,005^2)$$

$$Q = 2,66 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

## 4. INTRODUÇÃO À ANÁLISE DIFERENCIAL DOS MOVIMENTOS DOS FLUIDOS

### 4.1. Conservação da massa

Forma diferencial da lei da conservação da massa em coordenadas retangulares:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

#### Casos especiais

Incompressível: A massa específica não é função nem das coordenadas espaciais nem do tempo.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ou na forma vetorial:

$$\nabla \vec{V} = 0$$

Permanente: Todas as propriedades do fluido são, por definição, independente do tempo assim:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

Na forma vetorial:

$$\nabla \rho \vec{V} = 0$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial (r\rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Incompressível:

$$\frac{\partial(rVr)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial Vz}{\partial z} = 0$$

Permanente:

$$\frac{\partial(r\rho Vr)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho Vz)}{\partial z} = 0$$

#### Exemplo 4:

Um escoamento incompressível em regime permanente tem as componentes de velocidade  $u = x^3 + 2z^2$  e  $w = y^3 - 2yz$ . Qual deve ser a componente  $v(x,y,z)$  para que o escoamento satisfaça a equação da continuidade?

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$3x^2 + \frac{\partial v}{\partial y} - 2y = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y - 3x^2 \quad (1)$$

Integrando  $\frac{\partial v}{\partial y}$ :

$$\int dv = \int (2y - 3x^2) dy$$

$$v = y^2 - 3x^2y + f(x, y) \quad (2)$$

Derivando e comparando com a equação 1:

$$v' = 2y - 3x^2 + f'(x, y) = 2y - 3x^2$$

$$f'(x, y) = 0$$

Integrando

$$f(x, y) = C$$

Assim, substituindo na equação 2:

$$v = y^2 - 3x^2y + C$$

## 4.2. Equação de Navier-stokes

Para escoamentos incompressíveis com viscosidade constante:

### Coordenadas retangulares

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Na forma vetorial:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

### Coordenada cilíndricas

$$\rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta$$

$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

### Exemplo 5:

Um escoamento sem atrito, em regime permanente, o campo de velocidade é dado por:  $V=2xyi-y^2j$ . Sendo a densidade constante e desprezando a gravidade, ache uma expressão para o gradiente de pressão na direção x.

*Solução*

## Hipóteses

1. Escoamento invíscido
2. Escoamento em regime permanente
3. Gravidade desprezível
4. Escoamento Incompressível
5. Escoamento bidimensional

$$u = 2xy$$

$$v = -y^2$$

Utilizando a equação de Navier-Stokes na direção x:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Com as simplificações a equação fica:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho [2xy(2y) + (-y^2)(2x)]$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho 2xy^2$$

### 4.3. Equação de Euler

A equação de Euler é usada para escoamentos invíscidos, ou seja,  $\mu=0$ :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p$$

É a equação de Navier-Stokes simplificada.

#### 4.3.1 Equação de Euler em Coordenadas de Linhas de Correntes

Para um escoamento em regime permanente

Equação normal à linha de corrente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V^2}{R}$$

Onde:

R: raio de curvatura da linha de corrente.

#### 4.4. Função de Corrente para Escoamento Incompressível e Bidimensional $\varphi$

Coordenadas retangulares

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Coordenadas cilíndricas

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad V_\theta = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

Pontos de estagnação

Os pontos de estagnação são o x e y onde a velocidade é igual a zero.

#### 4.5. Potencial de Velocidade $\phi$

Coordenadas retangulares

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Coordenadas cilíndricas

$$V_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \quad V_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad V_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

#### Exemplo 6:

Para as funções de corrente, em m<sup>2</sup>/s, determine a magnitude e ângulo dos vetores velocidade com o eixo x, na posição x=2m e y = 4m.

$$\varphi = xy + x^2$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$u = xi \quad v = -(y+2x)j$$

$$\vec{V} = xi - (y+2x)j$$

Em  $x = 2$  e  $y = 4$ :

$$\vec{V} = 2i - 8j$$

Magnitude:

$$|\vec{V}| = \sqrt{(2)^2 + (-8)^2}$$

$$|\vec{V}| = 8,25 \text{ m/s}$$

Ângulo com o eixo x:

$$\text{tg}\theta = \frac{v}{u}$$

$$\text{tg}\theta = \frac{-8}{2}$$

$$\theta = -75,96^\circ$$

#### 4.6. Equação de Bernoulli

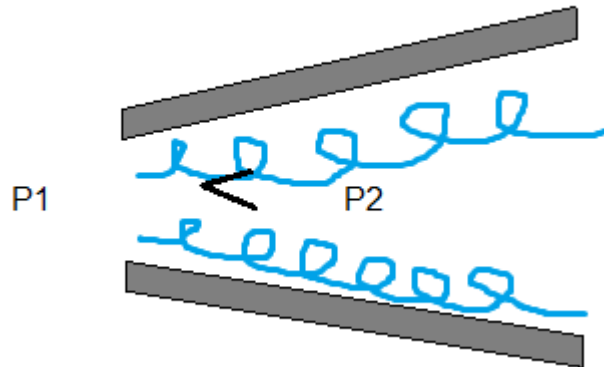
A equação de Bernoulli necessita das seguintes hipóteses:

- \_ Escoamento em regime permanente
- \_ Escoamento incompressível
- \_ Escoamento sem atrito
- \_ Escoamento ao longo de uma linha de corrente

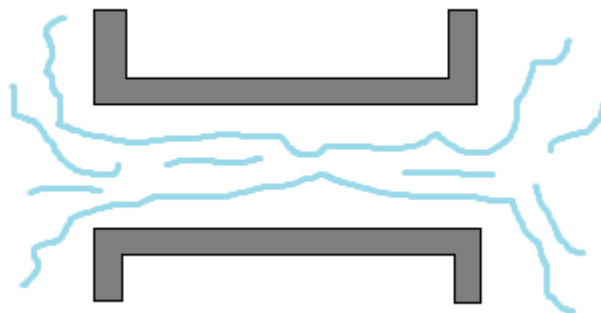
$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = \text{cte}$$

Algumas restrições da equação de Bernoulli:

1. Quando a gradiente de pressão não for favorável, pois, não existem linhas de corrente.

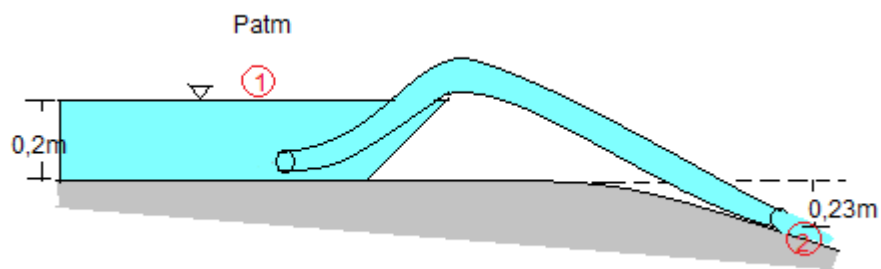


2. Quando há mudanças bruscas na geometria do sólido.



### Exemplo 7:

Uma mangueira de jardim de 10 m de comprimento e diâmetro interno de 20 mm é usada para drenar uma piscina. Se os efeitos da viscosidade forem desconsiderados, qual a vazão de drenagem?



Solução

Hipóteses:

- \_ Escoamento invíscido
- \_ Escoamento em regime permanente
- \_ Piscina muito grande

Com essas hipóteses é possível aplicar a equação de Bernoulli nos pontos 1 e 2:

$$\frac{P1}{\rho} + \frac{V1^2}{2} + gz_1 = \frac{P2}{\rho} + \frac{V2^2}{2} + gz_2$$

P2 e P1 são iguais a Patm, pois estão diretamente no ar e V1 pode ser aproximada á zero, já que a piscina é grande e a velocidade de vazão é pequena.

Simplificando a equação:

$$V_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}$$

$$V_2 = \sqrt{2 \cdot 9,81(0,2 - (-0,23))}$$

$$V_2 = 2,9 \text{ m/s}$$

Agora para descobrir a vazão de drenagem basta aplicar a fórmula da vazão no ponto 2:

$$Q_2 = V_2 \cdot A_2$$

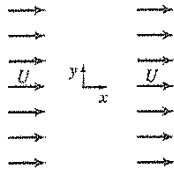
$$Q_2 = 2,9 \cdot \pi r^2$$

$$Q_2 = 2,9\pi \cdot 0,01^2$$

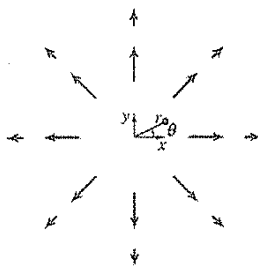
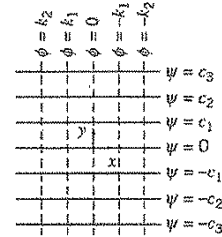
$$Q_2 = 9,11 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

### 4.7. Escoamento em Planos Elementares

Potencial de velocidade  $\phi$  e função da linha de corrente  $\psi$  para planos elementares são facilmente encontrados na tabela abaixo:



**Escoamento Uniforme (sentido positivo de x)**  
 $u = U \quad \psi = Uy$   
 $v = 0 \quad \phi = -Ux$   
 $\Gamma = 0$  em torno de qualquer curva fechada

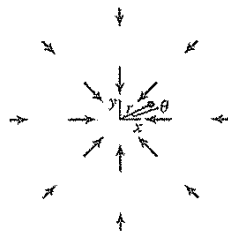
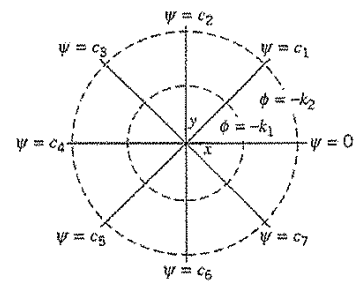


**Escoamento Fonte (a partir da origem)**

$$V_r = \frac{q}{2\pi r} \quad \psi = \frac{q}{2\pi} \theta$$

$$V_\theta = 0 \quad \phi = -\frac{q}{2\pi} \ln r$$

A origem é um ponto singular  
 $q$  é a vazão volumétrica por unidade de profundidade  
 $\Gamma = 0$  em torno de qualquer curva fechada

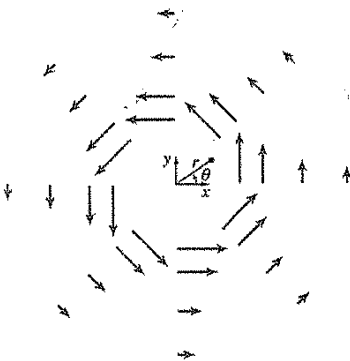
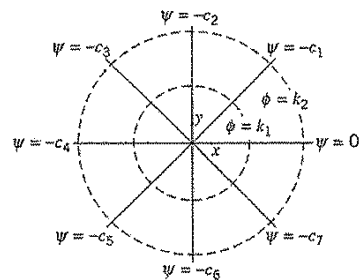


**Escoamento Sorvedouro (para a origem)**

$$V_r = -\frac{q}{2\pi r} \quad \psi = -\frac{q}{2\pi} \theta$$

$$V_\theta = 0 \quad \phi = \frac{q}{2\pi} \ln r$$

A origem é um ponto singular  
 $q$  é a vazão volumétrica por unidade de profundidade  
 $\Gamma = 0$  em torno de qualquer curva fechada

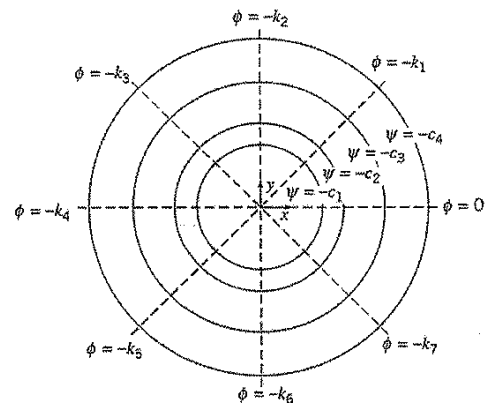


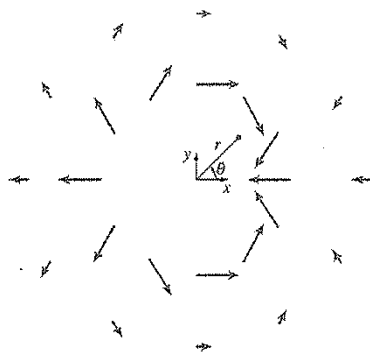
**Vórtice Irrotacional (no sentido anti-horário, centro na origem)**

$$V_r = 0 \quad \psi = -\frac{K}{2\pi} \ln r$$

$$V_\theta = \frac{K}{2\pi r} \quad \phi = -\frac{K}{2\pi} \theta$$

A origem é um ponto singular  
 $K$  é a intensidade do vórtice  
 $\Gamma = K$  em torno de qualquer curva fechada contendo a origem  
 $\Gamma = 0$  em torno de qualquer curva fechada não contendo a origem



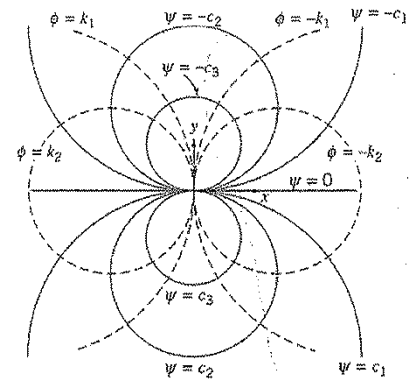


Dipolo (centro na origem)

$$V_r = -\frac{\Lambda}{r^2} \cos \theta \quad \psi = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r}$$

$$V_\theta = -\frac{\Lambda}{r^2} \sin \theta \quad \phi = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r}$$

A origem é um ponto singular  
 $\Lambda$  é a intensidade do dipolo  
 $\Gamma = 0$  em torno de qualquer curva fechada



#### 4.8. Superposição de Escoamentos em Planos Elementares

Somente quando for incompressível e irrotacional.

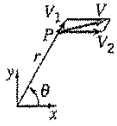
$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$u_3 = u_1 + u_2$$

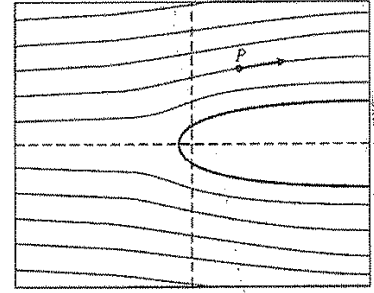
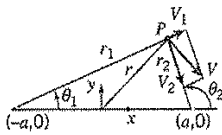
$$v_3 = v_1 + v_2$$

Método direto: Combinações

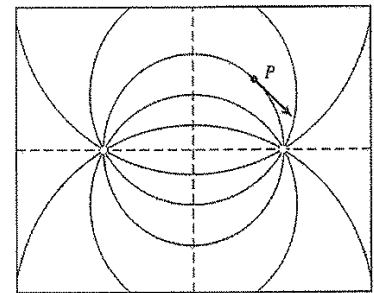
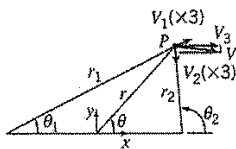
Algumas combinações já foram estudadas e colocadas na tabela a seguir:

**Fonte e Escoamento Uniforme (escoamento sobre um meio corpo)**


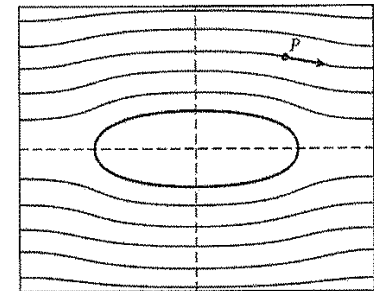
$$\begin{aligned}\psi &= \psi_{so} + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta + Uy \\ \psi &= \frac{q}{2\pi}\theta + Ur \sin \theta \\ \phi &= \phi_{so} + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi} \ln r - Ux \\ \phi &= -\frac{q}{2\pi} \ln r - Ur \cos \theta\end{aligned}$$

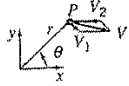

**Fonte e Sorvedouro (intensidade igual, distância de separação sobre o eixo x = 2a)**


$$\begin{aligned}\psi &= \psi_{so} + \psi_{si} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta_1 - \frac{q}{2\pi}\theta_2 \\ \psi &= \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) \\ \phi &= \phi_{so} + \phi_{si} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi} \ln r_1 + \frac{q}{2\pi} \ln r_2 \\ \phi &= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}\end{aligned}$$


**Fonte, Sorvedouro e Escoamento Uniforme (escoamento sobre um corpo de Rankine)**


$$\begin{aligned}\psi &= \psi_{so} + \psi_{si} + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \\ &= \frac{q}{2\pi}\theta_1 - \frac{q}{2\pi}\theta_2 + Uy \\ \psi &= \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) + Ur \sin \theta \\ \phi &= \phi_{so} + \phi_{si} + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \\ &= -\frac{q}{2\pi} \ln r_1 + \frac{q}{2\pi} \ln r_2 - Ux \\ \phi &= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} - Ur \cos \theta\end{aligned}$$



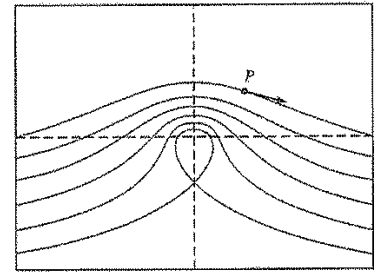
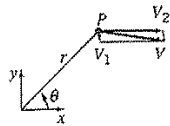
**Vórtice (sentido horário) e Escoamento Uniforme**


$$\psi = \psi_v + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{K}{2\pi} \ln r + Uy$$

$$\psi = \frac{K}{2\pi} \ln r + Ur \sin \theta$$

$$\phi = \phi_v + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = \frac{K}{2\pi} \theta - Ux$$

$$\phi = \frac{K}{2\pi} \theta - Ur \cos \theta$$


**Dipolo e Escoamento Uniforme (escoamento sobre um cilindro)**


$$\psi = \psi_d + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r} + Uy$$

$$= -\frac{\Lambda \sin \theta}{r} + Ur \sin \theta$$

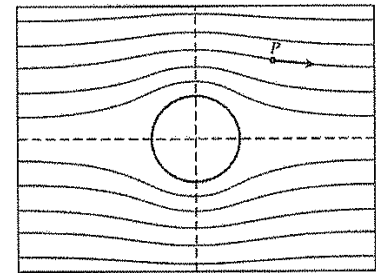
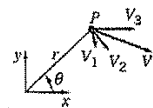
$$\psi = U \left( r - \frac{\Lambda}{Ur} \right) \sin \theta$$

$$\psi = Ur \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}}$$

$$\phi = \phi_d + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r} - Ux$$

$$= -\frac{\Lambda \cos \theta}{r} - Ur \cos \theta$$

$$\phi = -U \left( r + \frac{\Lambda}{Ur} \right) \cos \theta = -Ur \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta$$


**Dipolo, Vórtice (sentido horário) e Escoamento Uniforme (escoamento sobre um cilindro com circulação)**


$$\psi = \psi_d + \psi_v + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$$

$$= -\frac{\Lambda \sin \theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \ln r + Uy$$

$$\psi = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \ln r + Ur \sin \theta$$

$$\psi = Ur \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{K}{2\pi} \ln r$$

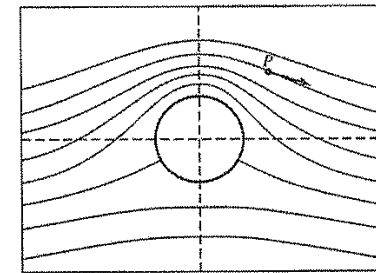
$$\phi = \phi_d + \phi_v + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

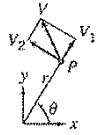
$$= -\frac{\Lambda \cos \theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \theta - Ux$$

$$a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}}; K < 4\pi aU$$

$$\phi = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \theta - Ur \cos \theta$$

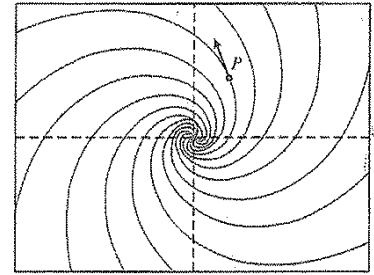
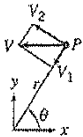
$$\phi = -Ur \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta + \frac{K}{2\pi} \theta$$



**Fonte e Vórtice (vórtice em espiral)**


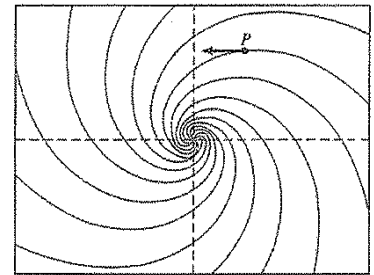
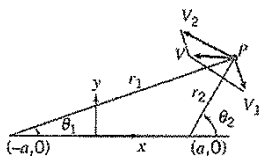
$$\psi = \psi_{so} + \psi_v = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi} \theta - \frac{K}{2\pi} \ln r$$

$$\phi = \phi_{so} + \phi_v = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi} \ln r - \frac{K}{2\pi} \theta$$


**Sorvedouro e Vórtice**


$$\psi = \psi_{si} + \psi_v = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{q}{2\pi} \theta - \frac{K}{2\pi} \ln r$$

$$\phi = \phi_{si} + \phi_v = \phi_1 + \phi_2 = \frac{q}{2\pi} \ln r - \frac{K}{2\pi} \theta$$

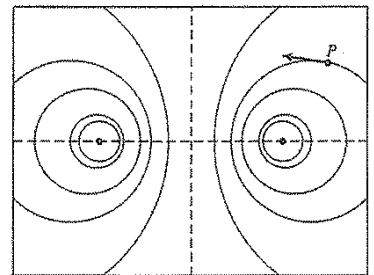

**Par de Vórtices (intensidade igual, rotação oposta e distância de separação sobre o eixo x = 2a)**


$$\psi = \psi_{v1} + \psi_{v2} = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{K}{2\pi} \ln r_1 + \frac{K}{2\pi} \ln r_2$$

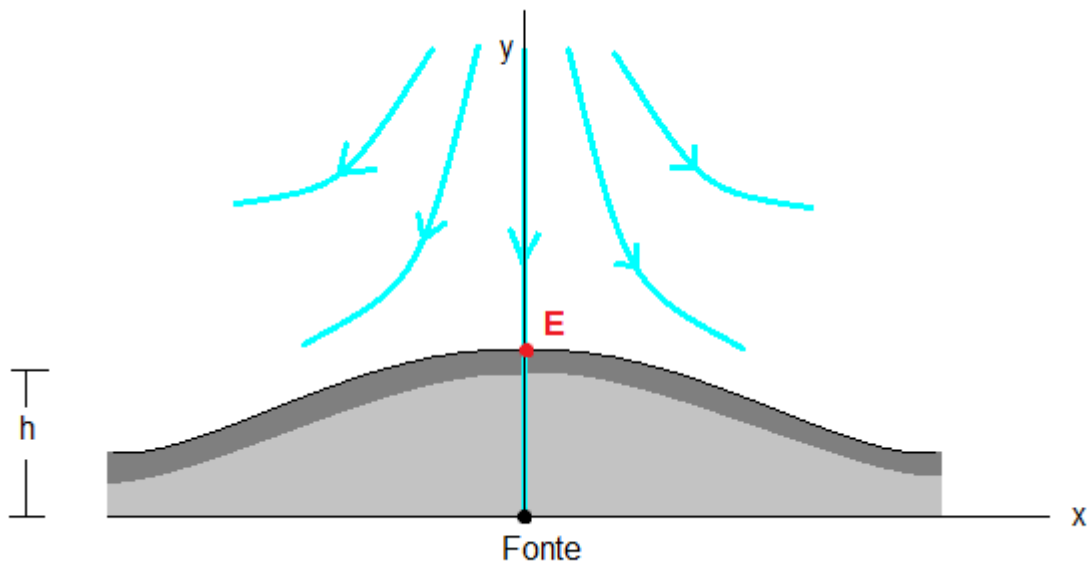
$$\psi = \frac{K}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\phi = \phi_{v1} + \phi_{v2} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{K}{2\pi} \theta_1 + \frac{K}{2\pi} \theta_2$$

$$\phi = \frac{K}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$$


**Exemplo 8:**

O escoamento potencial contra uma placa plana pode ser descrito com a seguinte função de corrente:  $\varphi = Axy$ , onde  $A$  é uma constante. Esse é um escoamento com ponto de estagnação contra uma placa com uma lombada. Determine a relação entre a altura  $h$  da lombada, constante  $A$  e a intensidade  $q$  da fonte.



Utilizando a superposição com a fonte:

$$\varphi = Axy + \varphi_{\text{fonte}}$$

$$\varphi = Axy + \frac{q\theta}{2\pi}$$

Transformando a equação para coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta \\ y &= r \sin\theta \end{aligned}$$

$$\varphi = A r \cos\theta r \sin\theta + \frac{q\theta}{2\pi}$$

$$\varphi = A r^2 \cos\theta \sin\theta + \frac{q\theta}{2\pi}$$

Utilizando a propriedade dos senos e cossenos:

$$\text{Sen}2\theta = 2 \cos\theta \sin\theta$$

Então:

$$\frac{1}{2}\text{sen}2\theta = \cos\theta \sin\theta$$

$$\varphi = \frac{A}{2} r^2 \text{sen}2\theta + \frac{q\theta}{2\pi}$$

Encontrando as velocidades:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$V_\theta = - \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$V_r = A r \cos 2\theta + \frac{q}{2\pi r}$$

$$V_\theta = - A r \sin 2\theta$$

No ponto E:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad r = h$$

Substituindo nas velocidades e igualando a zero:

$$V_r = A h \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \frac{q}{2\pi h}$$

$$V_\theta = - A h \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$0 = A h(-1) + \frac{q}{2\pi h}$$

$$V_\theta = 0$$

$$h^2 = \frac{q}{2\pi A}$$

## 5. ANÁLISE DIMENSIONAL E SEMELHANÇA

Em muitos testes e pesquisas são utilizados modelos em escalas muito menores que o produto real. Mas como saber se o tamanho do modelo se comportará da mesma maneira que o produto real se comportaria em diferentes situações? Para isso, utiliza-se a análise dimensional e semelhança.

### 5.1. Determinação dos Grupos $\pi$

Os grupos  $\pi$  são compostos somente por parâmetros adimensionais. Para determiná-los é necessário seguir alguns passos. Esses passos são mostrados no exemplo a seguir:

#### Exemplo 9:

Força de arrasto sobre uma esfera lisa. Dados:  $F = f(\rho, \mu, D, v)$

**1° Passo:** Listar os parâmetros que julgar envolvidos

$F, V, D, \rho, \mu$

$n = 5$  parâmetros dimensionais

**2° Passo:** Listar as dimensões primárias envolvidas

$M$  ( massa )  $L$  ( comprimento )  $T$  ( tempo )

$r = 3$  dimensões primárias

**3° Passo:** Expressar os parâmetros em termos das dimensões

A **força** é expressa em massa x aceleração. A aceleração por sua vez, é expressa em distância percorrida / por tempo ao quadrado. Sendo assim:

$$F : \frac{ML}{t^2}$$

A **densidade** é expressa pela massa sobre o volume e o volume é expresso em comprimento ao cubo.

$$\rho : \frac{M}{L^3}$$

A **viscosidade** é expressa em:

$$\mu : \frac{M}{Lt}$$

O **diâmetro** é expresso em comprimento.

$$D : L$$

A **velocidade** é expressa em comprimento por tempo.

$$V: \frac{L}{t}$$

Então:

$$\frac{ML}{t^2} = f \left( \frac{M}{Lt}, \frac{M}{L^3}, L, \frac{L}{t} \right)$$

**4° Passo:** Encontrar a quantidade de parâmetros  $\pi$ . Para isso basta resolver a equação:

$$\begin{aligned} m &= n - r \\ m &= 5 - 3 \\ M &= 2 \end{aligned}$$

Então existem 2 parâmetros  $\pi$ .

**5° Passo:** Selecionar  $r$  parâmetros que em conjunto possuam todas as dimensões primárias (parâmetros repetentes).

- \_ Caracterize o fluido:  $\rho$
- \_ Caracterize a geometria:  $D$
- \_ Caracterize o escoamento:  $V$

*Obs:* \_ Não pode ser o parâmetro dependente (nesse caso o  $F$ ).

\_ Nenhum dos parâmetros repetentes pode ter dimensões que sejam uma potência das dimensões de outro parâmetro repetente; por exemplo,  $A$  ( $L^2$ ) e  $I$  ( $L^4$ ).

**6° Passo:** Parâmetros  $\pi$

$$\pi_1 = \rho^a V^b D^c F$$

Precisamos descobrir os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Expressando os parâmetros em dimensões:

$$\pi_1 = [ML^{-3}]^a [Lt^{-1}]^b [L]^c [MLt^{-2}]$$

Agora agrupamos os expoentes que cada dimensão primária está elevada e igualamos à zero:

$$M: a + 1 = 0 \qquad a = -1$$

$$t: -b - 2 = 0 \qquad b = -2$$

$$L : -3a + b + c + 1 = 0$$

$$c = -2$$

Então,

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

Da mesma maneira fazemos para  $\pi_2$ :

$$\pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu$$

$$\pi_2 = [ML^{-3}]^a [Lt^{-1}]^b [L]^c [Mt^{-1}L^{-1}]$$

$$M: d + 1 = 0$$

$$d = 1$$

$$t: -e - 1 = 0$$

$$e = -1$$

$$L: -3d + e + f - 1 = 0$$

$$f = 1$$

Assim:

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

**7º Passo:** Aplicar o teorema do pi de buckingham

$$\Pi_1 = f(\pi_2)$$

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho V D}\right)$$

**8º Passo:** Verificar se os grupos são adimensionais

$$\Pi_1 = M^{-1} L^3 L^{-2} t^2 L^2 M L t^{-2}$$

$$\Pi_1 = M^0 L^0 t^0 \text{ é adimensional}$$

$$\Pi_2 = M^{-1} L^3 L^{-1} t^1 M L^{-1} t^{-1} L^{-1}$$

$$\Pi_2 = M^0 L^0 t^0 \text{ é adimensional}$$

## 5.2. Grupos Adimensionais Importantes na Mecânica dos Fluidos

### Reynolds

Reynolds é definido pela Força Inercial sobre as Forças viscosas:

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} \quad \frac{F_{inércia}}{F_{viscosa}}$$

Pensando assim é fácil perceber que se a força inercial for dominante sobre as forças viscosas o Re será maior que 1, caso contrário o Re será menor que 1. Se nenhuma força dominar sobre a outra o Re será igual a 1.

### Euler

Também chamado de coeficiente de pressão, Cp é utilizado para medir a pressão no movimento dos fluidos.

$$\epsilon u = \frac{2\Delta p}{\rho V^2} \quad \frac{F_{pressão}}{F_{inércia}}$$

$\Delta P$ : É a pressão local menos a inicial  
 $\rho$  e  $V$ : Propriedades do fluido

### Cavitação

Nos estudos da cavitação utiliza-se a equação de Euler, só que o  $\Delta P$  é tomado como a pressão da corrente líquida ( $p$ ) menos a pressão de vapor líquido na temperatura de teste ( $p_v$ ).

$$Ca = \frac{2(p-p_v)}{\rho V^2}$$

Quanto menor o Ca, maior a probabilidade de ocorrer cavitação, o que é indesejável.

### Froude

O número de Froude é significativo para escoamentos com efeitos de superfície livre.

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gl}} \quad \frac{F_{inércia}}{F_{gravidade}}$$

### Weber

É um indicativo da existência, e da frequência, de ondas capilares em uma superfície livre.

$$We = \frac{\rho V^2 L}{\theta} \quad \frac{Finércia}{Fsuperficial}$$

### Mach

Caracteriza os efeitos da compressibilidade em um escoamento.

$$M = \frac{V}{c}$$

V = velocidade do escoamento

C = velocidade do som

## 5.3. Semelhança de Escoamentos e Estudos de Modelos

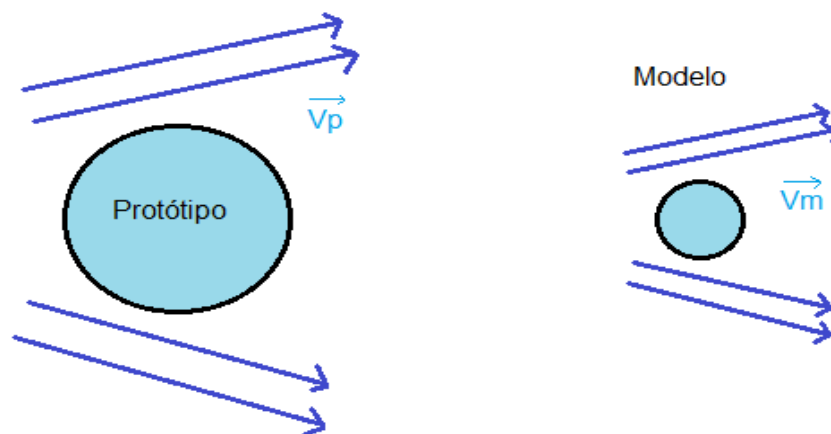
Modelo: Tamanho reduzido do protótipo.

Para os testes em um protótipo sejam eficazes em relação ao modelo algumas semelhanças devem ser consideradas:

### Semelhança Geométrica

As dimensões dos protótipos são proporcionais em escala as dimensões do modelo.

### Semelhança Cinemática



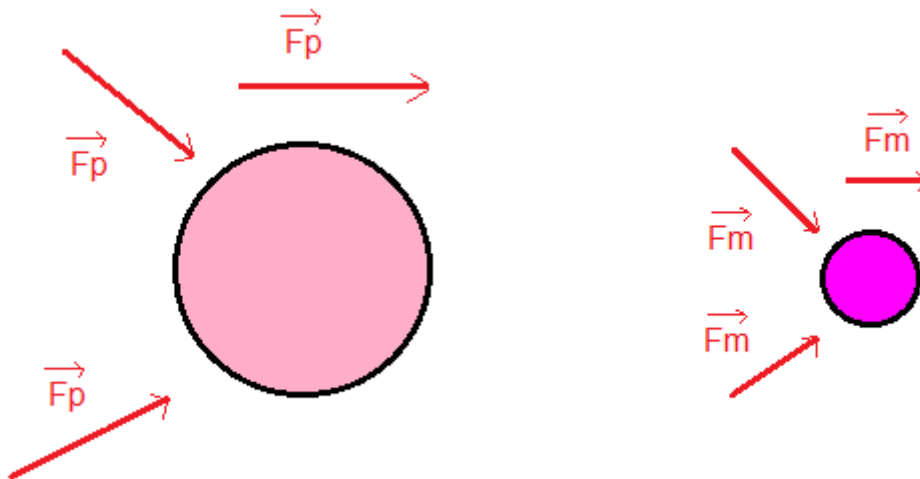
A velocidade do escoamento sobre o protótipo deve ter a mesma direção e sentido que a velocidade do escoamento sobre o modelo.

$$V_m = \varepsilon V_p$$

$\varepsilon$ : Fator de escala

A semelhança geométrica garante a semelhança cinemática.

### Semelhança Dinâmica



$$F_m = \varepsilon F_p$$

A semelhança cinemática é condição necessária, mas não garante a semelhança dinâmica.

$$Re_m = Re_p : \quad \left[ \frac{\rho V D}{\mu} \right]_m = \left[ \frac{\rho V D}{\mu} \right]_p \quad \left[ \frac{F}{\rho V^2 D^2} \right]_m = \left[ \frac{F}{\rho V^2 D^2} \right]_p$$

$$Fr_m = Fr_p$$

$$Ca_m = Ca_p$$

### Exemplo 10:

Um modelo de um transdutor sonar é testado em um túnel de vento. A força de arrasto sobre o modelo é  $F_m = 5\text{N}$ . O transdutor é rebocado a uma velocidade de  $2\text{m/s}$  no mar.

- Determine a velocidade necessária no ar para se realizar um teste eficaz ( $V_m$ ).
- Estime a força de arrasto sobre o protótipo ( $F_p$ ).

Dados:

Modelo:  $F_m = 5\text{N}$

$D_m = 0,5\text{m}$

$\mu_{ar} = 1,81 \times 10^{-5} \text{ N.s/m}^2$

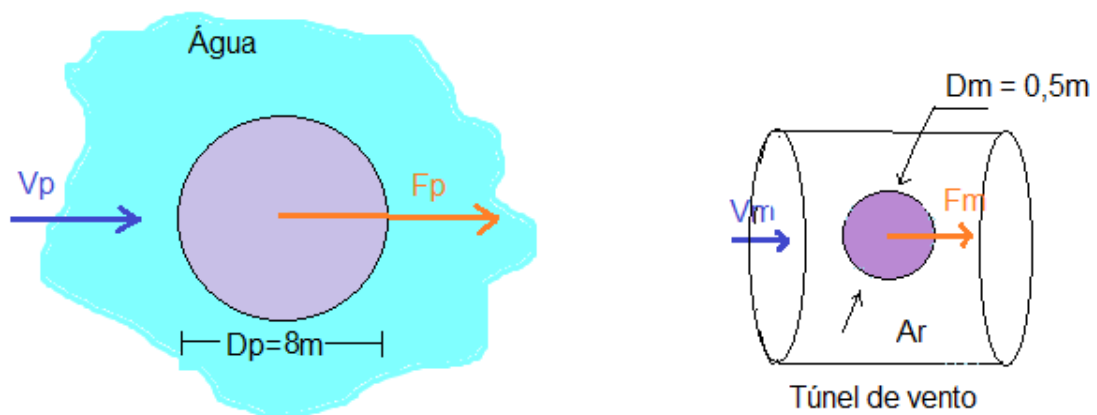
$\rho_{ar} = 1,225 \text{ Kg/m}^3$

Protótipo:  $V_p = 2\text{m/s}$

$D_p = 8\text{m}$

$\rho_{mar} = 1025 \text{ Kg/m}^3$

$\mu_{mar} = 1,218 \times 10^{-3} \text{ N.s/m}^2$



Para o teste ser eficaz é necessário garantir a semelhança dinâmica.

$Re_m = Re_p$

$$\left[ \frac{\rho V D}{\mu} \right]_m = \left[ \frac{\rho V D}{\mu} \right]_p$$

Agora colocando os valores na equação:

$$\frac{1,225 \cdot V_m \cdot 0,5}{1,81 \times 10^{-5}} = \frac{1025 \cdot 2,8}{1,218 \times 10^{-3}}$$

a)

$$V_m = 397,9 \text{ m/s}$$

$$\left[ \frac{F}{\rho V^2 D^2} \right]_m = \left[ \frac{F}{\rho V^2 D^2} \right]_p$$

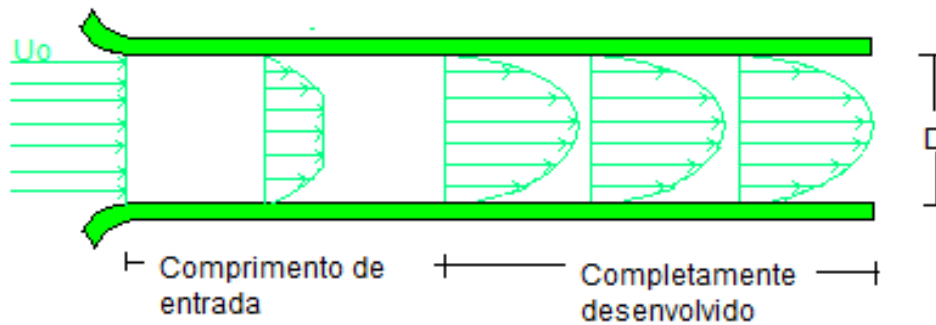
$$F_p = F_m \frac{\rho_p V_p^2 D_p^2}{\rho_m V_m^2 D_m^2}$$

$$F_p = 5 \cdot \frac{1025 \cdot 2^2 \cdot 8^2}{1,225 \cdot 387,8^2 \cdot 0,5^2}$$

b)

$$F_p = 29,37 \text{ N}$$

## 6. ESCOAMENTO VISCOSO INTERNO E INCOMPRESSÍVEL



Na entrada do tubo a velocidade do escoamento é uniforme. Devido à condição de não deslizamento, sabemos que a velocidade na parede do tubo é zero em toda a extensão. Para escoamentos incompressíveis, a conservação da massa exige que, conforme a velocidade na proximidade da parede é reduzida, a velocidade na região central sem atrito do tudo deve crescer para compensar. Suficientemente longe da entrada do tubo, o perfil de velocidade não muda mais. Nessa região o escoamento está completamente desenvolvido e é inteiramente viscoso. O comprimento do tubo onde o escoamento ainda está se desenvolvendo é chamado comprimento de entrada.

A condição de completamente desenvolvido faz com que  $\frac{\partial}{\partial x}$  seja igual a zero.

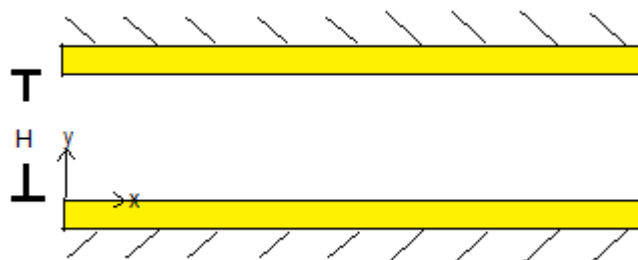
### Escoamento laminar completamente desenvolvido

O comprimento de entrada pode ser calculado como:

$$\frac{L}{D} = 0,06 \frac{\rho V D}{\mu}$$

### 6.1. Entre Placas Paralelas Infinitas

#### 6.1.1. Ambas Estacionárias



Hipóteses:

- \_ Regime Permanente
- \_ Bidimensional
- \_  $F_B = 0$
- \_ Completamente desenvolvido

### Distribuição da Velocidade

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial X} (2y - H)$$

### Distribuição da tensão cisalhante

$$T_{xy} = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{então,}$$

$$T_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial X} (2y - H)$$

### Vazão em volume

$$Q = \frac{-b}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial X} \frac{H^3}{6} \quad \text{b: Profundidade}$$

### Velocidade Média

$$\bar{V} = \frac{-\partial P}{\partial X} \frac{H^2}{12\mu}$$

### Vazão Volumétrica como função da queda de pressão

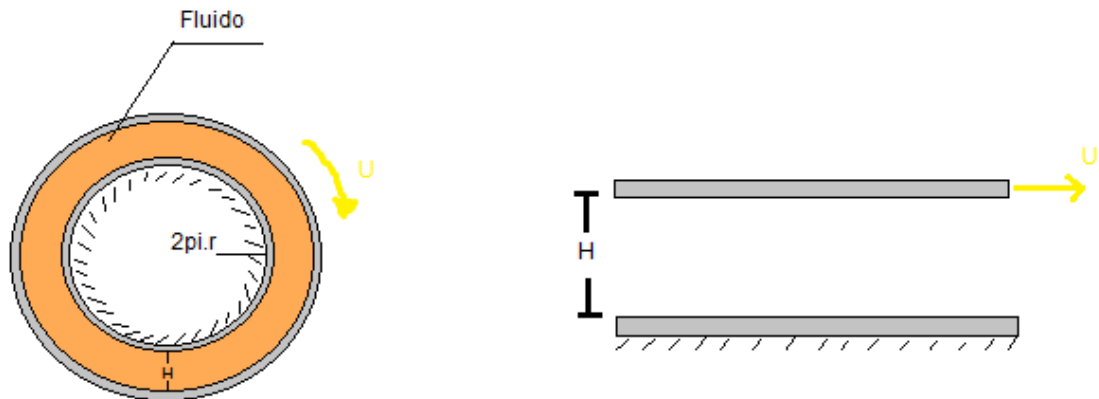
$$\frac{Q}{b} = \frac{H^3 \Delta P}{12\mu L}$$

### Ponto de Velocidade máxima

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$y = \frac{H}{2}$$

### 6.1.2. Em um Pistão



Placa superior se movendo com velocidade constante

#### Distribuição da Velocidade

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial X} (y^2 - Hy) + \frac{Uy}{H}$$

#### Tensão cisalhante

$U = \omega R$  então,

$$T_{xy} = \mu \cdot \frac{\omega R}{H}$$

#### Ponto de Velocidade máxima

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$y = \frac{H}{2} - \frac{U/H}{\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)}$$

#### Torque

$$T = F \cdot R$$

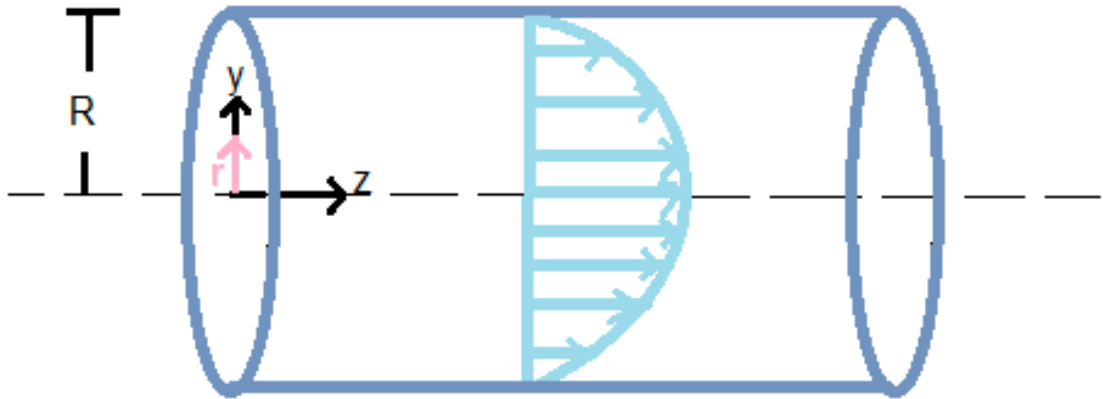
$$F = \tau_{yx} \cdot A_s$$

$$A_s = 2\pi R L$$

$$T = \mu \cdot \frac{\omega R}{H} 2\pi R L \cdot R$$

Potência

$$W = T \cdot \omega$$

**6.1.3. Escoamento em Dutos**

Distribuição da Velocidade

$$V_z = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (r^2 - R^2)$$

Distribuição da tensão cisalhante

$$\mathcal{T}_{xy} = \frac{r}{2} \frac{\partial P}{\partial z}$$

Vazão em volume

$$Q = \frac{-\pi R^4}{8\mu} \frac{\partial P}{\partial z}$$

Velocidade Média

$$V = \frac{-\partial P}{\partial z} \frac{R^2}{8\mu}$$

Vazão Volumétrica como função da queda de pressão

$$\Delta P = \frac{128Q\mu L}{\pi D^4}$$

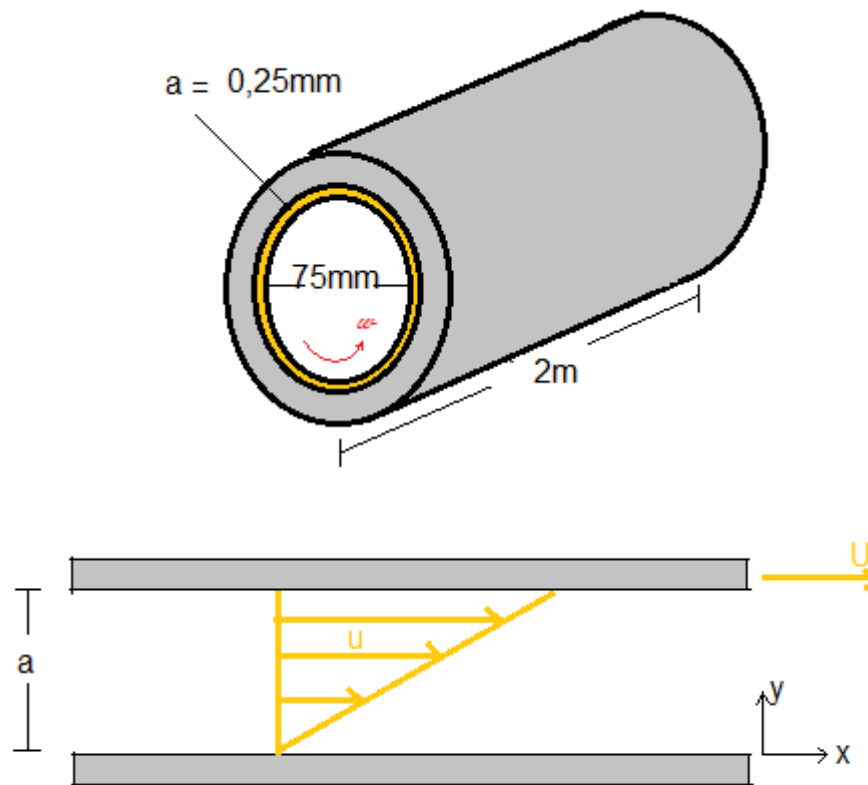
### Ponto de Velocidade máxima

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} = 0$$

$$r = 0$$

### Exemplo 11:

O mancal de virabrequim é lubrificado por óleo  $\mu = 0,2 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . O eixo gira a 80rpm. Determine o torque requerido para girar o eixo e a potência dissipada.



Hipóteses:

- \_ Escoamento em um pistão
- \_ Escoamento Laminar
- \_ Regime permanente
- \_ Incompressível
- \_ Completamente desenvolvido
- \_  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , o escoamento é simétrico no mancal real sem carga.

$$3600 \text{ rpm} = \frac{80 \cdot 2\pi}{60} \text{ rad/s} = 8,38 \text{ rad/s}$$

Vimos que:

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial X} (y^2 - Hy) + \frac{Uy}{H}$$

$$U = \frac{Uy}{H}$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{U}{H}$$

$$U = \omega R$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\omega R}{H}$$

$$\tau_{yx} = 0,2 \frac{8,38 \times 0,0375}{2,5 \times 10^{-4}}$$

$$T = F \cdot R$$

$$\tau_{yx} = 251,4 \text{ Pa}$$

$$F = \tau_{yx} \cdot A$$

$$T = 251,42 \pi R L R$$

$$T = 502,8 \cdot 0,0375^2 \cdot 2$$

a) Torque:

$$T = 1,42 \text{ N.m}$$

$$W = F U$$

$$W = F R \omega$$

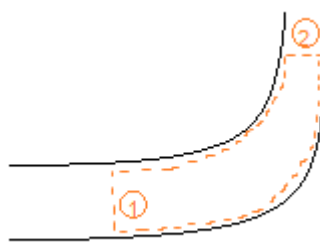
$$W = T \omega$$

$$W = 1,42 \cdot 8,38$$

b) Potência:

$$W = 11,85 \text{ w}$$

## 6.2. Equação da Energia em Escoamento em Tubos



$$\left( \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \right) - \left( \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right) = h_{lt}$$

Onde:

$\alpha = 2$  : Laminar

$\alpha = 1$  : Turbulento

$h_{lt}$ : Perda de carga total

## 6.3. Perda de Carga

$$h_{lt} = h_l + h_{lm}$$

$h_l$ : Perdas maiores, causadas por efeitos de atrito no escoamento completamente desenvolvido.

$h_{lm}$ : Perdas localizadas ou menores, causadas por entradas, acessórios, variações de área e outras.

### Perdas maiores ( $h_l$ )

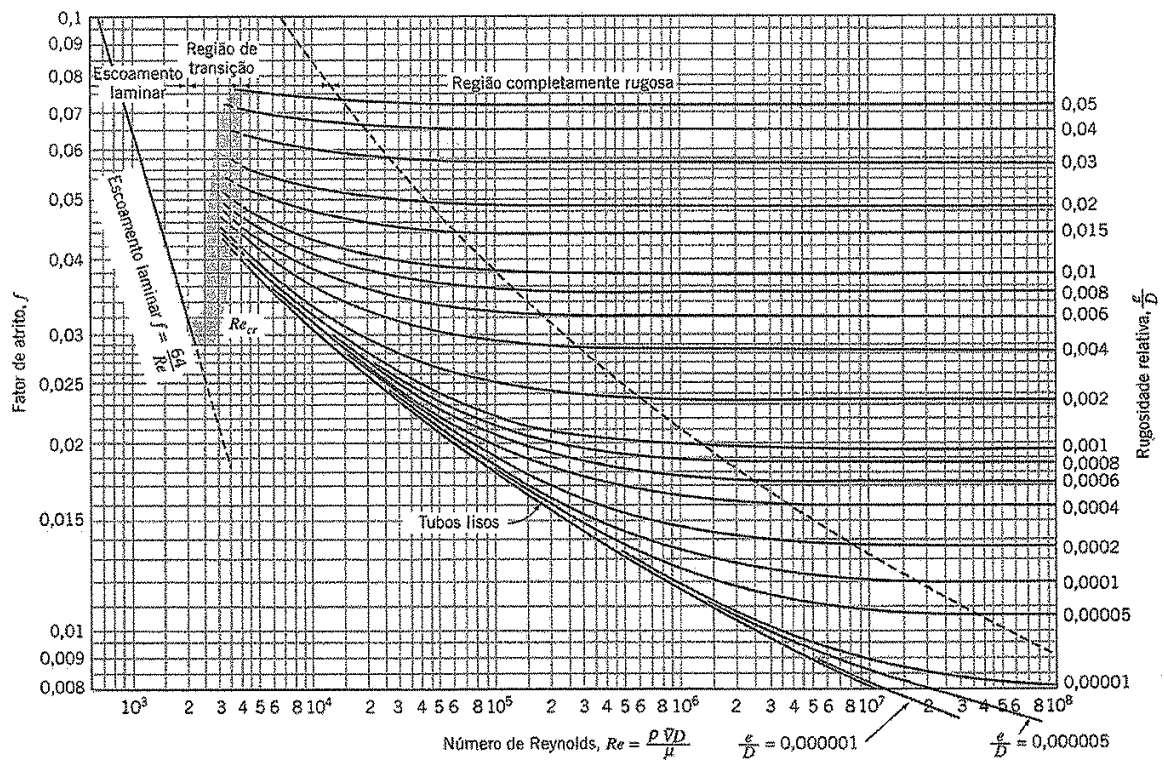
a) Escoamento Laminar

$$h_l = \left( \frac{64}{Re} \right) \frac{L}{D} \frac{V^2}{2}$$

b) Escoamento turbulento

$$h_l = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2}$$

$f$  é o fator de atrito q é função de  $Re$ ,  $\frac{e}{D}$ . Pode ser obtido através da seguinte tabela:



### Perdas Menores $h_{lm}$

Para escoamento completamente desenvolvido através de um tubo horizontal de área constante:  $h_{lm} = 0$ .

$$h_{lm} = K \frac{V^2}{2}$$

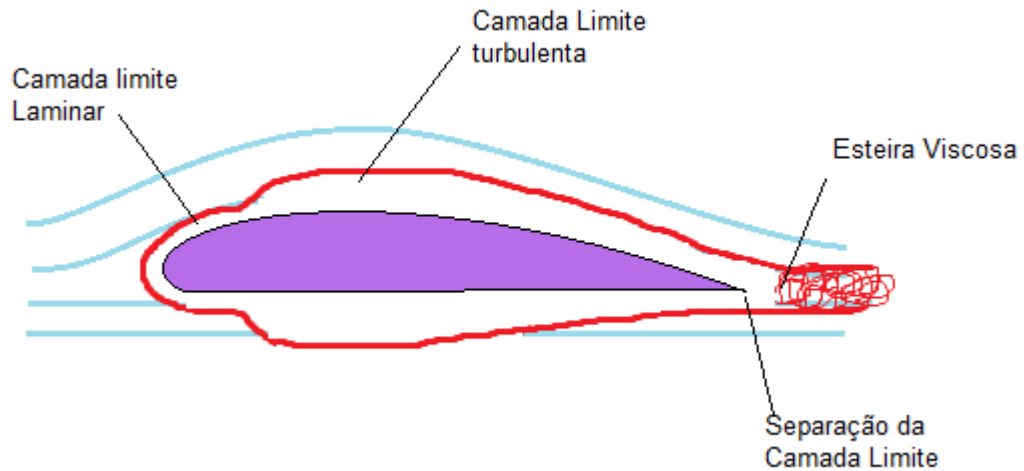
K pode variar com as entradas e saídas do tubo:

| Tipo de entrada | Diagrama | Coefficiente de perda K  |               |      |      |             |   |      |      |      |
|-----------------|----------|--|---------------|------|------|-------------|---|------|------|------|
| Reentrante      |          | 0,78   |               |      |      |             |   |      |      |      |
| Canto vivo      |          | 0,5  |               |      |      |             |   |      |      |      |
| Arredondada     |          | <table border="1"> <tr> <td><math>\frac{r}{D}</math></td> <td>0,02</td> <td>0,06</td> <td><math>\geq 0,15</math></td> </tr> <tr> <td>K</td> <td>0,28</td> <td>0,15</td> <td>0,04</td> </tr> </table> | $\frac{r}{D}$ | 0,02 | 0,06 | $\geq 0,15$ | K | 0,28 | 0,15 | 0,04 |
| $\frac{r}{D}$   | 0,02     | 0,06   | $\geq 0,15$   |      |      |             |   |      |      |      |
| K               | 0,28     | 0,15   | 0,04          |      |      |             |   |      |      |      |

O K também varia com expansões e contrações, curvas, válvulas e acessórios entre outros. Esses valores de K podem ser facilmente obtidos em tabelas de livros de mecânica dos fluidos.

## 7. ESCOAMENTO VISCOSO, INCOMPRESSÍVEL E EXTERNO

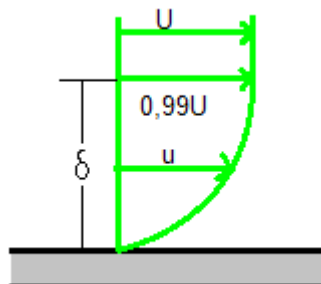
Quando um objeto move-se através de um fluido o movimento das moléculas do fluido perto do objeto é perturbado, e estas moléculas movem-se ao redor do objeto, gerando forças aerodinâmicas.



### 7.1. Espessuras da Camada Limite

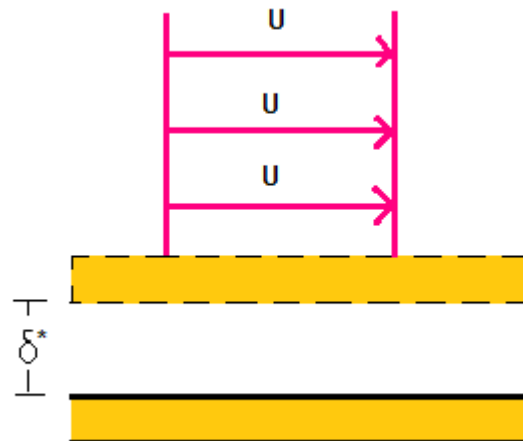
#### Espessura de perturbação, $\delta$

É a distância da superfície na qual a velocidade situa-se dentro de 1% da velocidade da corrente livre, isto é,  $u \approx 0,99U$ .



#### Espessura de deslocamento, $\delta^*$

É a distância na qual a placa seria deslocada de forma que a perda de fluxo de massa ( devido à redução na área do escoamento uniforme) fosse equivalente à perda causada pela camada-limite.

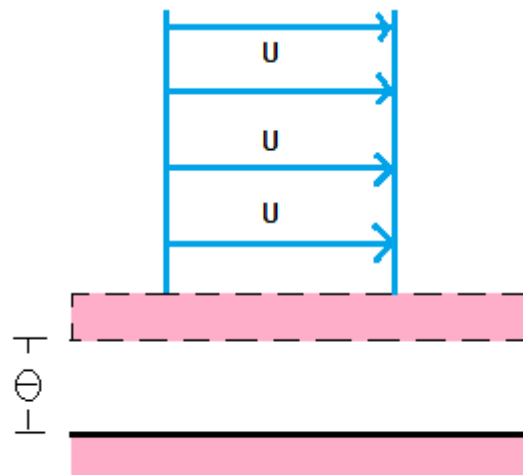


Para escoamentos incompressíveis,

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Espessura de quantidade de movimento,  $\theta$

É a distância que a placa seria movida de modo que a perda de fluxo de quantidade de movimento fosse equivalente à perda real causada pela camada-limite.



$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Hipóteses simplificadoras

Essas hipóteses simplificadoras são usualmente feitas em análises de engenharia, visto que o perfil de velocidade em uma camada-limite une-se assintoticamente com a velocidade da corrente livre.

1.  $u \rightarrow U$  em  $y = \delta$
2.  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  em  $y = \delta$
3.  $u \ll U$  dentro da camada-limite
4.  $\Delta P$  é desprezível

## 7.2. Escoamento Sobre Uma Placa Plana Horizontal (Blausius)

### Escoamento Laminar

$$\text{Espessura da camada-limite: } \delta = \frac{5x}{\sqrt{(Re_x)}}$$

$$\text{Coeficiente de atrito superficial: } C_f = \frac{0,664}{\sqrt{(Re_x)}}$$

### Solução aproximada ( Laminar ou turbulento)

$$\text{Espessura da camada-limite: } \delta = \frac{5,48}{\sqrt{(Re_x)}}$$

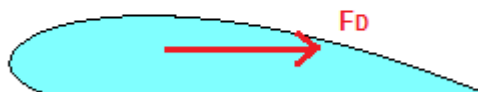
$$\text{Coeficiente de atrito superficial: } C_f = \frac{0,73}{\sqrt{(Re_x)}}$$

### Escoamento turbulento sobre a placa plana

$$\text{Espessura da camada-limite: } \delta = \frac{0,382}{\sqrt{(Re_x)}}$$

$$\text{Coeficiente de atrito superficial: } C_f = \frac{0,0594}{\sqrt{(Re_x)}}$$

## 7.3. Força de Arrasto

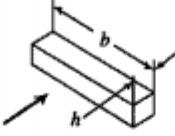
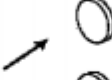
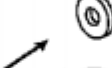






A força de arrasto é força que faz resistência ao movimento de um objeto sólido através de um fluido.

### Coeficiente de arrasto

$$C_D = \frac{F_d}{\frac{1}{2} \rho v^2 A}$$

O coeficiente de arrasto para objetos selecionados ( $Re \geq 10^3$ ) pode ser determinado com auxílio da seguinte tabela:

| Objeto  | Diagrama  |                | $C_D (Re \geq 10^3)$ |
|---|---|----------------|----------------------|
| Prisma quadrado                                       |    | $b/h = \infty$ | 2,05                 |
|   |   | $b/h = 1$      | 1,05                 |
| Disco   |    |                | 1,17                 |
| Anel  |    |                | 1,20 <sup>b</sup>    |
| Hemisfério (extremidade aberta faceando o escoamento) |   |                | 1,42                 |
| Hemisfério (extremidade aberta faceando a jusante)    |  |                | 0,38                 |
| Seção C (lado aberto faceando o escoamento)           |  |                | 2,30                 |
| Seção C (lado aberto faceando a jusante)              |  |                | 1,20                 |

### Exemplo 12:

Em um teste para medir a velocidade máxima de carros, um tuatara atinge uma velocidade de 432 km/h. Imediatamente, após passar pelo sinalizador de tempo, o piloto abre o paraquedas de frenagem, de área  $A = 21 \text{ m}^2$ . As resistências do ar e do rolamento do carro podem ser desprezadas. Determine o tempo necessário para que o veículo desacelere para 36 km/h. A massa do carro é de 1000 kg.

Dados:

$$V_i = 432 \text{ km/h ou } 120 \text{ m/s}$$

$$V_f = 36 \text{ km/h ou } 10 \text{ m/s}$$

$$\rho(\text{ar}) = 1,21 \text{ kg/m}^3 \text{ a } 20^\circ\text{C}$$

$$\mu(\text{ar}) = 1,81 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$$



Para achar o  $C_D$  pode-se utilizar a tabela desde que o  $Re$  seja maior ou igual a  $10^3$ . Então, calculando o  $Re$ :

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Encontrando o Diâmetro:

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$D = \left(\frac{4A}{\pi}\right)^{1/2}$$

$$D = \left(\frac{4 \times 21}{\pi}\right)^{1/2}$$

$$D = 5,17\text{m}$$

$$Re = \frac{1,21 \times 10 \times 11,28}{1,81 \times 10^{-5}}$$

$$Re = 7,54 \times 10^6$$

O  $Re$  do problema valida a hipótese, então pela tabela:  $C_D = 1,42$ .

Considerando a segunda Lei de Newton:

$$-F_D = ma$$

$$-F_D = m \frac{dV}{dt} \quad (1)$$

E da equação da força de arrasto:

$$F_D = \frac{C_D \rho V^2 A}{2} \quad (2)$$

Igualando 1 e 2:

$$\frac{-C_D \rho V^2 A}{2} = m \frac{dV}{dt}$$

Integrando:

$$\frac{-1 C_D \rho A}{2m} \int_0^t dt = \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{2}$$

$$\frac{-1 C_D \rho A}{2m} t = -\frac{1}{V_f} + \frac{1}{V_i}$$

$$\frac{-1 C_D \rho A}{2m} t = -\frac{(V_i - V_f)}{V_f V_i}$$

$$t = \frac{(V_i - V_f)}{V_f V_i} \frac{2m}{C_D \rho A}$$

$$t = \frac{(120 - 10)}{120 \times 10} \frac{2 \times 1000}{1,42 \times 1,21 \times 21}$$

$t = 5,08 \text{ s}$

## 8. SUGESTÃO DE ESTUDO

Para melhor entendimento da matéria, primeiramente deve se ler os capítulos do livro que são estudados em sala assim que lhe são apresentados. Após o término da leitura do capítulo, é sugerido tentar resolver os exemplos do livro sem olhar a resolução e em seguida resolver os exercícios sugeridos. Para fixar e revisar o assunto, essa apostila deve ser estudada.

### Leitura

Introdução à MECÂNICA DOS FLUIDOS, Robert W. Fox, Philip J. Pritchard, Alan T. McDonald; Sétima edição.

### Exercícios

Capítulo 3: 3.23, 3.24, 3.26, 3.28, 3.51 e 3.65

Capítulo 4: 4.12, 4.22, 4.66 e 4.195

Capítulo 5: 5.4, 5.5, 5.10, 5.22, 5.36, 5.40, 5.47

Capítulo 6: 6.10, 6.28, 6.39, 6.46, 6.67, 6.77

Capítulo 7: 7.9, 7.12, 7.15, 7.42, 7.46, 7.50, 7.76

Capítulo 8: 8.1, 8.9, 8.20, 8.47, 8.57, 8.76, 8.84, 8.90, 8.117

Capítulo 9: 9.12, 9.19, 9,81, 9,84, 9,98

## REFERÊNCIAS

Fox, Robert; Pritchard, Philip; McDonald, Alan; Introdução à Mecânica dos Fluidos, sétima edição.

[HTTP://WWW.FENG.PUCRS.BR/LSFM/MECFLU/MECANICA-DOS-FLUIDOS/APOSTILA%20MECANICA%20DOS%20FLUIDOS%202011.PDF](http://www.feng.pucrs.br/LSFM/MECFLU/MECANICA-DOS-FLUIDOS/APOSTILA%20MECANICA%20DOS%20FLUIDOS%202011.PDF)

[HTTP://WWW.UFPE.BR/LDPFLU/CAPITULO5.PDF](http://www.ufpe.br/LDPFLU/CAPITULO5.PDF)

[HTTP://UFPEMECANICA.FILES.WORDPRESS.COM/2011/07/ANC3A1LISE-DIMENSIONAL-E-SEMELHANC3A7A-DINC3A2MICA-CORRIGIDO.PDF](http://ufpemechanica.files.wordpress.com/2011/07/ANC3A1LISE-DIMENSIONAL-E-SEMELHANC3A7A-DINC3A2MICA-CORRIGIDO.PDF)

[HTTP://SOMAUTOMOTIVOCARROSTUNING.BLOGSPOT.COM.BR/2011/07/TUATARA-E-O-NOME-DO-NOVO-ESPORTIVO-DA.HTML](http://somaautomotivocarrostuning.blogspot.com.br/2011/07/tuata-ra-e-o-nome-do-novo-esportivo-da.html)